6. פתרון נוסחאות נסיגה

בסעיף 4.4, ראינו שבבעיות מניה רבות קל יחסית למצוא נוסחת נסיגה המתארת את הפתרון, בעוד שפתרון ישיר הוא קשה. אולם כדי לקבל פתרון מפורש לבעיית המניה, עלינו לפתור עדיין את נוסחת הנסיגה. נוסחאות נסיגה שימושיות גם לתיאור הסיבוכיות של אלגוריתמים רקורסיביים במדעי המחשב, וגם שם דרוש פתרון של נוסחת נסיגה (אף שלרוב מספיק פתרון מקורב בהקשר זה). בפרק זה נציג כמה שיטות לפתרון של נוסחאות נסיגה.

6.1. שיטת ההצבה החוזרת

הנושאים שיוצגו: *פתרון נוסחאות נסיגה על ידי הצבה חוזרת והוכחת נכונות באינדוקציה.*

נשתמש בנוסחת הנסיגה כדי לחשב את ערכי הפונקציה אחורה, עד שנגיע לערכי ההתחלה. שימו לב שזהו רק חישוב היוריסטי שמצריך הצדקה מסוימת. דהיינו, אחרי שמגיעים לתשובה על ידי הצבה חוזרת בנוסחה יש להוכיח (לרוב על ידי אינדוקציה מתמטית) שזה אכן הפתרון הנכון, וזאת משום שפתרון בשיטה זו כולל במהלכו ניחוש כלשהו, וייתכן כמובן שניחוש זה מוטעה.
מכל מקום, לאחר פיתוח אינטואיציה לסוג זה של בעיות, ניתן לפתור שאלות רבות כאלה על ידי ניחוש מוצלח ואישורו בהוכחה אינדוקטיבית פשוטה. יתר על כן, כפי שנראה בהמשך, גישה מועילה נוספת היא לנסות ניחושים ולתקנם עד למציאת הניחוש הנכון.

דוגמה 6.1.1: כזכור, בסעיף 4.4, תוארה בעיית מגדלי האנוי, וראינו שמספר הצעדים הדרושים לפתרונה נתון על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$h(1) = 1$, $h(n) = 2h(n-1) + 1$ לכל $n > 1$.

על ידי שימוש חוזר בנוסחת הנסיגה נקבל:

$$\begin{aligned} h(n) &= 2h(n-1)+1 \\ &= 2[2h(n-2)+1]+1 = 4h(n-2)+3 \\ &= 4[2h(n-3)+1]+3 = 8h(n-3)+7 \end{aligned}$$

בשלב זה אם נתבונן בביטוי שקיבלנו נוכל לנחש שאם נמשיך ונציב כך בנוסחה k פעמים נקבל:

$$h(n) = 2^k h(n-k) + (2^k - 1)$$

מטרתנו להמשיך ולהציב בנוסחה עד שנגיע לערך ההתחלה שהוא $h(1) = 1$. אם נמשיך ונציב בנוסחה $(n-1)$ פעמים נקבל:

$$h(n) = 2^{n-1}h(n-(n-1)) + (2^{n-1}-1) = 2^{n-1}h(1) + (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

כלומר, פתרון הנוסחה הוא $h(n) = 2^n-1$. כאמור, כעת יש להוכיח באינדוקציה מתמטית שזה אכן הפתרון של נוסחת הנסיגה. נעשה זאת אם כן.

טענה 6.1.2: פתרון נוסחת הנסיגה

$h(1) = 1$, $h(n) = 2h(n-1) + 1$ לכל $n > 1$,

הוא $h(n) = 2^n-1$ לכל $n \geq 1$.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n = 1$, ואכן על פי נוסחת הנסיגה $h(1) = 1$, וגם על פי הפתרון המפורש מתקיים $h(1) = 2^1-1 = 1$.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $(n-1)$ ונוכיח ל- n. על פי נוסחת הנסיגה:

$h(n) = 2h(n-1) + 1$.

אולם לפי הנחת האינדוקציה $h(n-1) = 2^{n-1} - 1$. נציב זאת בנוסחה ונקבל:

$h(n) = 2h(n-1) + 1 = 2\cdot(2^{n-1}-1) + 1 = 2^n - 1$.

כלומר הטענה נכונה גם ל- n, ולכן על פי עקרון האינדוקציה המתמטית הטענה הוכחה. □

דוגמה 6.1.3: נתונה נוסחת הנסיגה $g(1) = 1$, $g(n) = g(n-1) + 2n-1$ לכל $n > 1$.

על ידי הצבה חוזרת בנוסחה נקבל:

$$\begin{aligned} g(n) &= g(n-1)+2n-1 \\ &= g(n-2)+2(n-1)-1+2n-1 = g(n-2)+4n-4 \\ &= g(n-3)+2(n-2)-1+4n-4 = g(n-3)+6n-9 \end{aligned}$$

אחרי k הצבות חוזרות נקבל:

$$g(n) = g(n-k) + 2kn - k^2$$

ואחרי $(n-1)$ הצבות נקבל:

$$g(n) = g(n-(n-1)) + 2(n-1)n - (n-1)^2 = g(1) + 2n^2-2n-n^2+2n-1 = n^2$$

פתרון הנוסחה הוא לכן $g(n) = n^2$. (כאמור יש להוכיח זאת עתה באינדוקציה. זהו תרגיל קל).

שיטת פתרון זו מעוררת כמה בעיות. ראשית, לא תמיד קל כל כך לנחש כיצד תתנהג הנוסחה לאחר k שלבים של הצבה חוזרת. שנית, אם ערך הנוסחה במספר n תלוי בערכי הנוסחה בשני מספרים קטנים יותר (או אף ביותר משני מספרים), אז תהליך ההצבה לאחור נעשה מסורבל ולעתים קרובות בלתי אפשרי. בהמשך נפתח שיטות נוספות ומשוכללות יותר לפתרון נוסחאות נסיגה מסובכות יותר.

תרגילים

1. פתרו כל אחת מנוסחאות הנסיגה הבאות בשיטת ההצבה החוזרת. הוכיחו באינדוקציה מתמטית שהפתרון שמצאתם הוא אכן הפתרון המפורש של הנוסחה.
   א. $f(0) = 1$, $f(n) = 2f(n-1)$ לכל $n > 0$.
   ב. $h(0) = 1$, $h(1) = 1$, $h(n) = 9h(n-2)$ לכל $n > 1$.
   ג. $f(0) = 1$, $f(n) = af(n-1) + b$ לכל $n > 0$ כאשר a,b מספרים ממשיים כלשהם.

6.2. נוסחאות נסיגה ליניאריות

הנושאים שיוצגו: *פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות ולא הומוגניות, הפולינום האופייני, המשוואה האופיינית.*

שיטות הלקוחות מתחום האלגברה הליניארית יסייעו לנו לפתור נוסחאות נסיגה מסוג מסוים. קוראים שעדיין לא התוודעו לתחום זה, יוכלו להסתייע בטכניקות שיתוארו כאן כדי לפתור נוסחאות נסיגה, מבלי להבין באופן מלא מדוע בדיוק הן נכונות. קוראים שכבר למדו אלגברה ודאי ייהנו מהקשר בין האלגברה לנוסחאות הנסיגה שיתוארו כאן.

הגדרה 6.2.1: יהיו $c_1,c_2,\dots,c_r$ מספרים ממשיים קבועים ותהי $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ פונקציה. נוסחת נסיגה מהצורה:

$$f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \dots + c_rf(n-r) + g(n),$$

נקראת **נוסחת נסיגה ליניארית מסדר r עם מקדמים קבועים**. אם $g(n) = 0$ אז נוסחת הנסיגה נקראת **הומוגנית**.

דוגמה 6.2.2: מספרי פיבונאצ'י (ראו סעיף 4.4) מוגדרים על ידי נוסחת הנסיגה:

$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ לכל $n > 1$.

זו נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים.

דוגמה 6.2.3: נוסחת הנסיגה הבאה היא נוסחת נסיגה ליניארית לא הומוגנית מסדר 3 עם מקדמים קבועים:

$h(0) = h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(n) = 3h(n-1) + 6h(n-2) - 4h(n-3) + n^2$ לכל $n > 2$.

דוגמה 6.2.4: נוסחת הנסיגה $f(0) = f(1) = 1$, $f(n) = f(n-1)f(n-2) + 7$ לכל $n > 1$, איננה נוסחה ליניארית.

פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

כיצד נפתור נוסחאות נסיגה כאלה? נדגים זאת באמצעות מציאת נוסחת מפורשת למספרי פיבונאצ׳י. ננסה להבין תחילה מהו קצב הגידול של מספרי פיבונאצ׳י. עובדה פשוטה ביותר היא שהסדרה עולה, כלומר לכל $n > 1$ מתקיים $f(n) > f(n-1)$. מכאן נובע כי לכל $n > 1$ מתקיים:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \le 2f(n-1)$$
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \ge 2f(n-2)$$

קל לפתור את האי-שוויונות האלה (למשל על ידי הצבה חוזרת) ולקבל:

$$2^{\lfloor n/2 \rfloor} \le f(n) \le 2^{n-1}.$$

כלומר, הפונקציה $f(n)$ חסומה מלמעלה ומלמטה על ידי פונקציות בעלות קצב גידול מעריכי ב- n.
ננסה לבדוק האם גם ל- $f(n)$ יש קצב גידול מעריכי. דהיינו, נחפש מספר ממשי x כך ש- $f(n) = x^n$.
נציב זאת בנוסחת הנסיגה:

$$x^n = f(n) = f(n-1) + f(n-2) = x^{n-1} + x^{n-2}.$$

נצמצם ב- x^{n-2} את השוויון $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$, ונקבל משוואה ריבועית $x^2 = x + 1$. פתרונות המשוואה הם:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ואכן שני הפתרונות מקיימים את נוסחת הנסיגה של $f(n)$. כלומר, סדרת המספרים $g(n) = x_1^n$ מקיימת את נוסחת הנסיגה של מספרי פיבונאצ׳י וכך גם הסדרה $h(n) = x_2^n$, דהיינו:

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2) \text{ לכל } n > 1,$$
$$h(n) = h(n-1) + h(n-2) \text{ לכל } n > 1.$$

אולם יש לנו שני תנאים נוספים שעלינו לקיים והם ערכי ההתחלה $f(0) = 1,\ f(1) = 1$, ותנאים אלה אינם מתקיימים על ידי הסדרה $g(n)$ ואף לא על ידי הסדרה $h(n)$. נשים לב, עם זאת, שאם נתבונן בסדרה:

$$u(n) = a_1 g(n) + a_2 h(n)$$

כש- a_1, a_2 שני קבועים ממשיים כלשהם, אז גם הסדרה $u(n)$ מקיימת אותה נוסחת נסיגה:

$$u(n) = u(n-1) + u(n-2) \text{ לכל } n > 1.$$

נחפש עתה קבועים a_1,a_2 כך שיתקיימו גם $u(0) = 1,\ u(1) = 1$. עלינו לפתור לכן את מערכת המשוואות הבאה:

$$1 = u(0) = a_1x_1^0 + a_2x_2^0 = a_1 + a_2$$
$$1 = u(1) = a_1x_1^1 + a_2x_2^1 = a_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + a_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

זו מערכת של שתי משוואות ליניאריות במשתנים a_1,a_2. ניתן לפתור אותה ולקבל:

$$a_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10},\quad a_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

מצאנו אם כן כי לכל $n \geq 0$ מתקיים:

$$\begin{aligned} f(n) &= a_1x_1^n + a_2x_2^n \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

להלן נראה ששיטת הפתרון שפיתחנו כאן אינה מוגבלת למספרי פיבונאצ׳י, והיא תקפה לפתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות בכלל (אף כי במקרים מסוימים יידרש עוד שכלול נוסף). כאמור שיטות מתחום האלגברה הליניארית יסייעו לנו בפתרון נוסחאות נסיגה הומוגניות.

נביט אם כן בנוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית:

$$f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \ldots + c_rf(n-r).$$

על מנת להגדיר את $f(n)$ באופן מלא נדרשים גם ערכי ההתחלה $f(0), f(1),\ldots,f(r-1)$. תחילה נתעלם מערכי ההתחלה ונחזור לדון בהם בהמשך. כפי שעשינו בדוגמה של מספרי פיבונאצ׳י, נחפש פתרון לנוסחת הנסיגה מהצורה $f(n) = x^n$ כאשר x מספר ממשי כלשהו. בכדי שביטוי כזה יפתור את נוסחת הנסיגה נדרש כי:

$$x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_rx^{n-r}.$$

נחלק ב- x^{n-r} ונקבל:

$$x^r = c_1x^{r-1} + c_2x^{r-2} + \ldots + c_r.$$

או:

$$x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \ldots - c_r = 0.$$

במילים אחרות על מנת ש- x^n יהיה פתרון לנוסחת הנסיגה, המספר x הוא בהכרח שורש של הפולינום:

$$P(x) = x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \ldots - c_r.$$

הגדרה 6.2.5: יהיו $c_1,c_2,\dots,c_r$ מספרים ממשיים קבועים, ותהי:

$$f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \dots + c_rf(n-r)$$

נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית מסדר r. הפולינום:

$$P(x) = x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \dots - c_r$$

נקרא **הפולינום האופייני** של נוסחת הנסיגה, ואילו המשוואה:

$$x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \dots - c_r = 0$$

נקראת **המשוואה האופיינית** של נוסחת הנסיגה.

כפי שראינו בדיוננו על מספרי פיבונאצ'י, לאחר מציאת הפתרונות x_1, x_2 לפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה, טענו שכל ביטוי מהצורה $a_1x_1^n + a_2x_2^n$ הוא פתרון של הנוסחה. זו תופעה כללית כפי שנוכיח להלן. ליודעי האלגברה הליניארית נאמר: אוסף הפתרונות של נוסחת הנסיגה הזו הוא מרחב ליניארי ולכן כל צירוף ליניארי של פתרונות מהווה פתרון אף הוא.

משפט 6.2.6: תהי $f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \dots + c_rf(n-r)$ נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, ויהיו $a(n)$, $b(n)$ פתרונות של הנוסחה. אז לכל α,β ממשיים, גם $\alpha a(n) + \beta b(n)$ פתרון (כלומר כל צירוף ליניארי של $a(n), b(n)$ גם הוא פתרון).

הוכחה: מכיוון ש- $a(n)$ פתרון של הנוסחה אז $a(n) = c_1a(n-1) + c_2a(n-2) + \dots + c_ra(n-r)$.

בדומה גם $b(n) = c_1b(n-1) + c_2b(n-2) + \dots + c_rb(n-r)$.

מכאן,

$$\begin{aligned}\alpha a(n) + \beta b(n) &= \\ &\alpha(c_1a(n-1) + \dots + c_ra(n-r)) + \beta(c_1b(n-1) + \dots + c_rb(n-r)) = \\ &c_1(\alpha a(n-1) + \beta b(n-1)) + \dots + c_r(\alpha a(n-r) + \beta b(n-r))\end{aligned}$$

כלומר גם $\alpha a(n) + \beta b(n)$ פתרון של הנוסחה. □

מסקנה 6.2.7: קבוצת הפתרונות היא מרחב וקטורי ממימד r.

הוכחה: לפי משפט 6.2.6, כל צירוף ליניארי של הפתרונות הוא פתרון ולכן קבוצת הפתרונות היא מרחב וקטורי. ממד המרחב הווקטורי הוא לכל היותר r כי בהינתן ערכי ההתחלה $f(0), f(1),\dots,f(r-1)$ אפשר לקבוע באופן יחיד את $f(n)$.

מאידך גיסא, לכל $0 \le j \le r-1$ נביט בפתרון u_j של נוסחת הנסיגה המתאים לערכי ההתחלה:

$$f(0) = f(1) = \dots = f(j-1) = 0, \quad f(j) = 1, \quad f(j+1) = f(j+2) = \dots = f(r-1) = 0.$$

נקבל r פתרונות שונים $u_0,\dots,u_{r-1}$. קל לוודא שאין ביניהם תלות ליניארית. ואכן, נניח כי $\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_j u_j$ היא פונקצית ה- 0, כלומר לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_j u_j(n) = 0$. אבל בפרט אם $0 \le n \le r-1$ אז:

$$u_j(n) = \begin{cases} 0, & j \ne n \\ 1, & j = n \end{cases}.$$

לכן השוויון $\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_j u_j(n)=0$ מצטמצם ל- $\alpha_n=0$. אם כן, כל המקדמים α_j מתאפסים, ולכן הפתרונות אינם תלויים ליניארית. מכאן שממד מרחב הפתרונות הוא בדיוק r, ולכן קבוצת הפתרונות של נוסחת הנסיגה היא מרחב וקטורי ממֵמד r. □

בדיון במספרי פיבונאצ'י עברנו בשלב זה לקביעת מקדמים מתאימים כך שיושגו גם ערכי ההתחלה המתאימים של $f(0), f(1)$. ניתן להראות שגם במקרה הכללי אפשר למצוא מקדמים כאלה, אולם העיסוק בשלב זה מחייב יציאה מתחום הדיון של הספר. אנו נניח להלן שכל שורשיו של הפולינום האופייני $P(x)$ הם ממשיים. תחילה נדון במקרה הפשוט יחסית שבו לפולינום האופייני $P(x)$ יש r שורשים ממשיים שונים, ואז נרחיב את הדיון למצב שבו יש לפולינום $P(x)$ גם שורשים מרובים.

משפט 6.2.8: תהי $f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \ldots + c_rf(n-r)$ נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, ויהי $x^r - c_1x^{r-1}-c_2x^{r-2}-\ldots-c_r$ הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה. אם לפולינום יש r שורשים שונים ממשיים $x_1,x_2,\ldots,x_r$, אז הפתרון הכללי של הנוסחה הוא:

$$x(n)=a_1x_1^n+a_2x_2^n+\ldots+a_rx_r^n,$$

כאשר $a_1,a_2,\ldots,a_r$ מספרים ממשיים כלשהם. ערכי ההתחלה $f(0),f(1),\ldots,f(r-1)$ של נוסחת הנסיגה, קובעים באופן יחיד את ערכיהם של $a_1,a_2,\ldots,a_r$.

הוכחה: כפי שכבר ראינו, כל אחד משורשי הפולינום האופייני מספק פתרון של נוסחת הנסיגה. לכן גם כל ביטוי מהצורה $x(n)=a_1x_1^n+a_2x_2^n+\ldots+a_rx_r^n$ הוא פתרון של נוסחת הנסיגה, בהיותו צירוף ליניארי של פתרונות (משפט 6.2.6). הבעיה שנותרה היא למצוא מקדמים $a_1,a_2,\ldots,a_r$ כך שיתקיימו גם ערכי ההתחלה, כלומר:

$$f(0) = x(0),\ f(1) = x(1),\ldots,\ f(r-1) = x(r-1).$$

היינו דרושים r מקדמים $a_1,a_2,\ldots,a_r$ שיקיימו את r המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} f(0)=a_1+a_2+\ldots+a_r \\ f(1)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_rx_r \\ \vdots \\ f(r-1)=a_1x_1^{r-1}+a_2x_2^{r-1}+\ldots+a_rx_r^{r-1} \end{cases}$$

זו מערכת משוואות ליניאריות במשתנים $a_1,a_2,\ldots,a_r$. מתוך התנאי שהשורשים $x_1,x_2,\ldots,x_r$ שונים זה מזה, נובע שיש למערכת הזו פתרון אחד ויחיד. לקוראים שכבר למדו אלגברה ליניארית, נעיר שהמטריצה של המערכת הזו היא מטריצת ונדרמונדה (Vandermonde):

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_r & \dots & x_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

אם כל השורשים x_i שונים זה מזה, ידוע שהמטריצה אינה סינגולרית, כי הרי מן האלגברה ידענו (או שמא לא?) כי ערכה של הדטרמיננטה המתאימה הוא:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_r & \dots & x_r^{r-1} \end{pmatrix} = \prod_{j<i}(x_i - x_j)$$

כלומר ערכה של הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן יש בחירה אחת ויחידה של $a_1,a_2,\dots,a_r$ הפותרת את מערכת המשוואות. □

דוגמה 6.2.9: נפתור את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$f(0) = 0,\ \ f(1) = f(2) = 1$$

$f(n) = 3f(n-1) + 4f(n-2) - 12f(n-3)$ לכל $n > 1$.

נסתכל על המשוואה האופיינית של הנוסחה:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$$

ניתן לכתוב את המשוואה הזאת גם באופן הבא:

$$(x-2)(x+2)(x-3) = 0$$

ולכן שורשי הפולינום האופייני הם:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3.$$

הפתרון הכללי לנוסחה יהיה לכן

$$f(n) = a_1x_1^n + a_2x_2^n + a_3x_3^n$$

כאשר a_1,a_2,a_3 מספרים ממשיים שייקבעו על פי ערכי התחלה של הנוסחה. מערכת המשוואות המתקבלת על ידי שימוש בערכי ההתחלה היא:

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= a_1 + a_2 + a_3 \\ 1 = f(1) &= 2a_1 - 2a_2 + 3a_3 \\ 1 = f(2) &= 4a_1 + 4a_2 + 9a_3 \end{aligned}$$

ופתרון מערכת המשוואות הוא:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{5}.$$

לכן פתרון הנוסחה הוא:

$$f(n) = \frac{3^n}{5} - \frac{(-2)^n}{5} \quad \text{לכל } n \ge 0.$$

נעבור כעת למקרה שבו לפולינום האופייני יש שורשים ממשיים מרובים.

משפט 6.2.10 (שורשים מרובים): תהי $f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \ldots + c_rf(n-r)$ נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, ויהי $x^r - c_1x^{r-1}-c_2x^{r-2}-\ldots-c_r$ הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה. אם לפולינום יש $k < r$ שורשים שונים ממשיים $x_1,x_2,\ldots,x_k$, כאשר ל- x_i יש ריבוי d_i, אז הפתרונות הבאים מהווים בסיס למרחב הפתרונות:

$$\begin{array}{cccc} x_1^n & x_2^n & \cdots & x_k^n \\ nx_1^n & nx_2^n & \cdots & nx_k^n \\ n^2x_1^n & n^2x_2^n & \cdots & n^2x_k^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^{d_1-1}x_1^n & n^{d_2-1}x_2^n & \cdots & n^{d_k-1}x_k^n \end{array}$$

והפתרון הכללי של הנוסחה נראה כך:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} P_i(n)x_i^n,$$

כאשר P_i הוא פולינום כלשהו ממעלה d_i-1. במילים אחרות, לכל בחירה של r קבועים ממשיים a_{ij} כש- $1\le i \le k$ ו- $0 \le j \le d_i-1$ הביטוי:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{d_i-1} a_{ij}n^jx_i^n$$

הוא פתרון של נוסחת הנסיגה, ולכל פתרון יש צורה כזו.
ערכי ההתחלה $f(0),f(1),\ldots,f(r-1)$ של נוסחת הנסיגה, יקבעו את ערכיהם של r הקבועים a_{ij}.

ההוכחה אינה קשה במיוחד למי שיודע אלגברה ליניארית. היא מתבססת על כך שמטריצה דומה למטריצת ונדרמונדה אינה סינגולרית. אנו משמיטים כאן את ההוכחה.

דוגמה 6.2.11: נתבונן בנוסחת הנסיגה:

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2$$

$$f(n) = 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3) \quad \text{לכל } n \ge 3.$$

המשוואה האופיינית תהיה:

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0.$$

אפשר לפרק את המשוואה הזאת כך:

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-2)(x-3)^2 = 0$$

לכן השורשים של הפולינום האופייני הם $x_1 = 2$ בריבוי של 1, ו- $x_2 = 3$ בריבוי של 2. מכאן, הפתרון הכללי של הנוסחה יהיה מהצורה:

$$f(n) = a_1 \cdot 2^n + a_2 \cdot 3^n + a_3 \cdot n \cdot 3^n.$$

כדי למצוא את הקבועים a_1, a_2, a_3 ניעזר בערכי ההתחלה:

$$f(0) = 0 = a_1 + a_2$$
$$f(1) = 1 = 2a_1 + 3a_2 + 3a_3$$
$$f(2) = 2 = 4a_1 + 9a_2 + 18a_3$$

פתרון מערכת המשוואות הוא $a_1 = -4,\ a_2 = 4,\ a_3 = -1$ ולכן פתרון הנוסחה הוא:

$$f(n) = -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n - n \cdot 3^n.$$

הערה נוספת קשורה לפולינום האופייני $P(x)$ ולחיפוש שורשיו. הקוראים למדו מן הסתם בבית הספר נוסחאות למציאת שורשים של פולינום ממעלה ראשונה ושנייה (היינו לפתור משוואה ליניארית ומשוואה ריבועית). יש גם נוסחאות המאפשרות לפתור גם משוואות ממעלה שלישית ורביעית. אולם ידוע שלמשוואות ממעלה חמישית ומעלה אין נוסחאות מפורשות כאלה. עניין זה נידון בהרחבה בתחום של האלגברה הנקרא "תורת השדות". יש גם דיון אינטנסיבי במציאת קירובים לשורשים של משוואות כאלה בתחום הנקרא "אנליזה נומרית", אולם אנו לא ניכנס לתחומים אלה כאן.

פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות לא-הומוגניות עם מקדמים קבועים

גם כאן הקשר לאלגברה ליניארית הדוק, וכפי שפתרון כללי למערכת משוואות לא-הומוגנית מתקבל מצירוף של פתרון כלשהו למערכת המשוואות הלא-הומוגנית ופתרון למערכת המשוואות ההומוגנית המתאימה, כך גם כשמדובר בנוסחאות נסיגה לא-הומוגניות. קוראים שלמדו כבר אלגברה ליניארית יזהו את העיקרון המשותף עם פתרון של מערכות ליניאריות הומוגניות ולא הומוגניות. זהו עיקרון רחב מאוד במתמטיקה המופיע גם בתחומים אחרים כגון פתרון של משוואות דיפרנציאליות.

ראינו כבר כיצד לפתור נוסחאות נסיגה הומוגניות כגון $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. נתבונן בדוגמה שבה עומדת בפנינו נוסחת נסיגה השונה מזו רק במעט.

דוגמה 6.2.12: נתבונן בנוסחת הנסיגה הבאה:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 7 \quad \text{לכל } n \ge 2.$$

האם השינוי הקטן הזה הורס לחלוטין את הפתרונות שמצאנו לנוסחת הנסיגה ההומוגנית $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$? בעצם לא קשה למצוא פתרון אחד לנוסחת הנסיגה הזו, דהיינו:

$$f(n) = -7 \quad \text{לכל } n \ge 0.$$

קל לוודא שזהו פתרון לנוסחת הנסיגה. אבל אם למשל, ערכי ההתחלה $f(0), f(1)$ הם שונים, זהו פתרון לא קביל. התשובה היא בשילוב פתרון זה עם הפתרונות של המשוואה ההומוגנית $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. דהיינו, הפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה הלא הומוגנית $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 7$ הוא:

$$f(n) = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 7$$

כשהמקדמים a_1,a_2 הם מספרים ממשיים כלשהם. עתה נוכל לקיים גם את ערכי ההתחלה הנדרשים. דרושים לנו מספרים ממשיים a_1,a_2 כך שהפתרון לעיל המקיים את נוסחת הנסיגה $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 7$, יקיים גם את ערכי ההתחלה $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. יש למצוא לכן את הפתרון לשתי המשוואות הבאות:

$$f(0) = 0 = a_1 + a_2 - 7$$
$$f(1) = 1 = a_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + a_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 7$$

והפתרון הוא:

$$a_1 = \frac{7}{2} + \frac{9\cdot\sqrt{5}}{10},\quad a_2 = \frac{7}{2} - \frac{9\cdot\sqrt{5}}{10}.$$

הדוגמה שראינו זה עתה אינה מקרית. המשפט שלהלן אומר שעל מנת לפתור נוסחאות נסיגה ליניאריות לא הומוגניות יש לפעול כך:

א. למצוא את הפתרון הכללי $h(n)$ של הנוסחה ההומוגנית בהתעלם מערכי ההתחלה.
ב. למצוא פתרון כלשהו $a(n)$ לנוסחה הלא הומוגנית, שוב בהתעלם מערכי ההתחלה.
ג. לקבוע את המקדמים בפתרון הכללי $h(n)$ כך שהסכום $h(n) + a(n)$ יקיים את ערכי ההתחלה.

לכל בחירה של המקדמים ב- $h(n)$ מובטח לנו ש- $h(n) + a(n)$ הוא פתרון לנוסחה הלא הומוגנית, ויש לנו די פרמטרים חופשיים על מנת להבטיח שהפתרון $h(n) + a(n)$ יקיים גם את ערכי ההתחלה.

משפט 6.2.13: תהי $f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \ldots + c_rf(n-r) + g(n)$ נוסחת נסיגה ליניארית לא-הומוגנית עם מקדמים קבועים. יהי $a(n)$ פתרון כלשהו של הנוסחה. לכל פתרון אחר $b(n)$ של הנוסחה יש הצורה $b(n) = a(n) + h(n)$ כאשר $h(n)$ פתרון של הנוסחה ההומוגנית המתאימה:

$$f(n) = c_1f(n-1) + c_2f(n-2) + \ldots + c_rf(n-r).$$

הוכחה: אם $a(n)$ פתרון של הנוסחה הלא-הומוגנית אז

$$a(n) = c_1a(n-1) + c_2a(n-2) + \ldots + c_ra(n-r) + g(n).$$

בדומה אם $b(n)$ פתרון של הנוסחה הלא-הומוגנית אז:

$$b(n) = c_1b(n-1) + c_2b(n-2) + \ldots + c_rb(n-r) + g(n).$$

לכן, אם נגדיר $h(n) = b(n) - a(n)$ ונחסר את שתי המשוואות האחרונות, נקבל:

$$h(n) = c_1h(n-1) + c_2h(n-2) + ... + c_rh(n-r)$$

כלומר $h(n)$ פתרון של הנוסחה ההומוגנית המתאימה.
ולהיפך, אם $h(n)$ פתרון של הנוסחה ההומוגנית המתאימה, אז $b(n) = a(n) + h(n)$ פתרון של הנוסחה הלא-הומוגנית. □

על פי המשפט האחרון כדי למצוא פתרון כללי לנוסחת נסיגה ליניארית לא-הומוגנית, עלינו למצוא פתרון כלשהו לנוסחת הנסיגה הלא-הומוגנית, לפתור את נוסחת הנסיגה ההומוגנית ולחבר את הפתרונות שמצאנו.

דוגמה 6.2.14: נפתור את נוסחת הנסיגה

$$f(0) = 0,\ f(n) = 2f(n-1) + 1 \text{ לכל } n \geq 1.$$

כזכור זו הנוסחה המתארת את מספר הצעדים הדרוש לפתרון בעיית מגדלי האנוי (ראו סעיף **4.4**). כאן $f(n) = -1$ הוא פתרון אפשרי לנוסחה הלא הומוגנית. הפתרון הכללי של הנוסחה ההומוגנית $f(n) = 2f(n-1)$ הוא $f(n) = \alpha\cdot2^n$ כש- α קבוע ממשי כלשהו. לכן, הפתרון הכללי לנוסחה הלא הומוגנית הוא:

$$f(n) = \alpha\cdot2^n - 1.$$

ערך ההתחלה $f(0) = 0$ גורר כי $\alpha = 1$ (בדקו), ולכן הפתרון הוא $f(n) = 2^n-1$, כפי שראינו גם בדוגמה **6.1.1**.

יש להעיר שאיננו מפתחים כאן שיטות למציאת פתרון כלשהו לנוסחה הלא הומוגנית. את כל הדוגמאות הנידונות כאן ניתן לפתור על ידי ניחוש אינטליגנטי ואימות. דרכים שיטתיות לשם כך אפשר למצוא בספרים מתקדמים יותר. יש לציין כי השיטות הידועות אינן פותרות כל בעיה מסוג זה ואף הן מוגבלות. לסיום סעיף זה נראה דוגמה נוספת.

דוגמה 6.2.15: נניח שעלינו לפתור את נוסחת הנסיגה $f(n) = 2f(n-1) + 4n - 6$. נחפש פתרון שבו $f(n)$ פונקציה ליניארית ב- n, נניח $f(n) = An + B$. ואכן, אם נציב זאת בנוסחת הנסיגה נקבל:

$$An + B = 2(A(n-1) + B) + 4n - 6.$$

על ידי העברת אגפים נקבל:

$$n(A+ 4) = 2A-B+6.$$

אגף שמאל של הזהות הזו תלוי ב- n ואגף ימין אינו תלוי ב- n. בכדי שזהות כזו תתקיים, הכרחי לכן שהאגפים יהיו זהים ל- **0**. דהיינו, $A = -4,\ B = -2$. ואכן, $f(n) = -4n-2$ הוא פתרון לנוסחה הלא הומוגנית. בדוגמה הקודמת ראינו שהפתרון של הנוסחה ההומוגנית $f(n) = 2f(n-1)$ הוא $f(n) = \alpha\cdot2^n$ כש- α קבוע ממשי כלשהו. לכן, על פי משפט **6.2.13**, הפתרון הכללי של הנוסחה הוא:

$$f(n) = \alpha\cdot2^n -4n -2.$$

תרגילים

1. נתונה נוסחת הנסיגה $f(1) = 3$, $f(n) = 2f(n-1)$ לכל $n > 1$. פתרו את הנוסחה על ידי מציאת שורשי הפולינום האופייני.

2. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות על ידי מציאת שורשי הפולינום האופייני:

א.
$$t(n)=\begin{cases}0, & n=0\\ 5, & n=1\\ 3t(n-1)+4t(n-2), & n>1\end{cases}$$

ב.
$$h(n)=\begin{cases}0, & n=0\\ 1, & n=1\\ 9h(n-2), & n>1\end{cases}$$

ג.
$$f(n)=\begin{cases}9n^2-15n+106, & n=0,1,2\\ f(n-1)+2f(n-2)-2f(n-3), & n>2\end{cases}$$

3. פתרו את נוסחת הנסיגה $f(n) = 2f(n-2) - f(n-4)$ לכל $n \geq 4$, עם ערכי ההתחלה $f(n) = n$ עבור $n = 0,1,2,3$.

4. פתרו את נוסחת הנסיגה $f(n) = 5f(n-1) - 8f(n-2) + 4f(n-3)$ לכל $n \geq 3$, עם ערכי ההתחלה $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

5. מצאו את הפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה $h(n) = 2h(n-1) - 3n^2 + 4n + 7$.
הדרכה: חפשו תחילה פתרון מסוים שהוא פולינום ממעלה שנייה.

6. פתרו את נוסחת הנסיגה $f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2) + 7$ עם ערכי ההתחלה $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

6.3. פונקציות יוצרות

הנושאים שיוצגו: פונקציות יוצרות, חוג קומוטטיבי, החוג של טורי החזקות הפורמליים, פתרון נוסחאות נסיגה והוכחת זהויות קומבינטוריות בעזרת פונקציות יוצרות, חלוקות של מספר.

את הדיון בפונקציות יוצרות נפתח שוב בדוגמה שכבר מוכרת לנו היטב: מספרי פיבונאצ'י. כזכור, ברצוננו לחשב את אברי הסדרה $f(n)$ אשר מוגדרים על ידי ערכי ההתחלה $f(0) = 1,\ f(1) = 1$ ונוסחת הנסיגה $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, לכל $n > 1$. ניתן לומר שאנו חוקרים את הסדרה האינסופית $f(0),\ f(1),\ f(2),\ldots$ המוגדרת כנ"ל. הרעיון הבסיסי בסעיף זה הוא שבהינתן לנו סדרה של מספרים ממשיים (כבדוגמה הנוכחית) נגדיר את הטור האינסופי:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot x^n = f(0)+f(1)\cdot x+f(2)\cdot x^2+f(3)\cdot x^3+\ldots\ .$$

לטור $F(x)$ אנו קוראים **הפונקציה היוצרת** של הסדרה $f(0),\ f(1),\ f(2),\ldots$.

צעד זה עשוי להיראות כרגע מוזר לקוראים שלא למדו אנליזה מתמטית וחשוד בעיני הקוראים שכבר למדו נושא זה. תשובתנו לקוראים שאינם מכירים עדיין אנליזה מתמטית היא שעל ידי

המעבר מן הסדרה $f(0), f(1), f(2),\ldots$ לטור החזקות $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot x^n$, אנו מגייסים לעזרתנו מאגר עשיר של כלים מתמטיים חזקים שייקלו עלינו בפתרון נוסחת הנסיגה. לעומת זאת, הקוראים שכבר למדו אנליזה, יתמהו, מן הסתם, עבור אלו ערכים של x הפונקציה $F(x)$ מוגדרת, או לחילופין עבור אלו ערכים של x הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot x^n$ מתכנס, האם הוא מתכנס, מהו רדיוס ההתכנסות שלו וכדומה. בהינתן הפונקציה $F(x)$ נתבונן לעתים בנגזרת שלה $F'(x)$. במקרה זה נרצה לגזור את איברי הטור איבר איבר, ואז עולה השאלה האם מתקיימים התנאים המבטיחים שוויון ל- $F'(x)$ וכדומה.

שאלות כאלה אכן מהוות מרכיב עיקרי בפיתוח החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. תשובתנו לקוראים מודאגים אלה היא: תנוח דעתכם. אנו נפעל במסגרת של מבנה **אלגברי** מתאים הנקרא החוג של טורי חזקות פורמליים, כך שכל הנקודות הבעייתיות שהוזכרו לעיל כלל לא תתעוררנה (ולמי שלא דאג עד כה, אשריו וטוב לו).

נגדיר עתה פורמלית את הכלים הדרושים לשימוש בפונקציות יוצרות. ניזכר תחילה בהגדרה של חוג – מושג יסודי מתחום האלגברה.

הגדרה 6.3.1: תהי R קבוצה לא ריקה, ו- $+$, $\cdot$ שתי פעולות המוגדרות על איברי R, ונקראות חיבור וכפל בהתאמה. המבנה $(R, +, \cdot)$ נקרא **חוג** אם מתקיים:

1. R חבורה קומוטטיבית ביחס לחיבור, כלומר:
   - פעולת החיבור + אסוציאטיבית: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a + (b + c) = (a + b) + c$.
   - קיים ב- R איבר יחידה חיבורי: קיים איבר $0_R \in R$ כך שלכל $a\in R$ מתקיים $a + 0_R = 0_R + a = a$. יתר על כן, איבר היחידה הוא יחיד ונקרא **איבר האפס** של החוג.
   - קיום איבר נגדי: לכל $a\in R$ קיים $b\in R$ כך ש- $a + b = b + a = 0_R$. יתר על כן, לכל $a\in R$ קיים b יחיד כנ"ל, שנקרא **הנגדי** של a ומסומן על ידי $-a$.
   - פעולת החיבור קומוטטיבית: לכל $a,b\in R$ מתקיים $a + b = b + a$.
2. פעולת הכפל אסוציאטיבית: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.
3. מתקיימים חוקי הפילוג הבאים:
   - לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$.
   - לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $(b + c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$.

החוג $(R,+,\cdot)$ נקרא **חוג קומוטטיבי** אם גם פעולת הכפל קומוטטיבית, כלומר לכל $a,b\in R$ מתקיים $a\cdot b = b\cdot a$.

החוג $(R,+,\cdot)$ נקרא **חוג עם יחידה** אם קיים איבר יחידה כפלי, כלומר קיים איבר $1_R\in R$ כך שלכל $a\in R$ מתקיים $a\cdot 1_R = 1_R\cdot a = a$. יתר על כן איבר היחידה 1_R הוא יחיד ונקרא **איבר היחידה** של החוג.

יהי $a \in R$ איבר בחוג $(R,+,\cdot)$ עם יחידה. אם קיים $b \in R$ המקיים $a \cdot b = b \cdot a = 1_R$ אז a נקרא **הפיך**. לא קשה להראות שבמקרה זה b כנ"ל הוא יחיד. קוראים ל- b **ההופכי** של a ומסמנים אותו על ידי a^{-1} או על ידי $\frac{1}{a}$.

הגדרה 6.3.2: הפונקציה היוצרת של סדרה $(a_0,a_1,a_2,\ldots)$ היא הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. הטור הנ"ל המתאים לסדרה $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ נקרא גם **טור חזקות פורמלי**. קבוצת כל הפונקציות היוצרות עם מקדמים ממשיים a_n נקראת **חוג טורי החזקות הפורמליים במשתנה יחיד מעל הממשיים**, ומסומנת על ידי $\mathbb{R}[\![x]\!]$. על מנת ש- $\mathbb{R}[\![x]\!]$ יהיה חוג עלינו להגדיר בו את שתי הפעולות הבסיסיות הבאות:

1. הגדרת פעולת החיבור $+$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

2. הגדרת פעולת הכפל $\cdot$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

ההגדרה הזו עלולה להיראות משונה תחילה, אולם אם ניזכר שכך בדיוק כופלים פולינומים, נמצא שהיא טבעית.

הערה: אם בטור חזקות מסוים יש רק מספר סופי של מקדמים a_n השונים מ- **0**, אז נהוג לאמץ צורת כתיבה חלופית ולרשום את הטור כפולינום. כך למשל, את טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ שבו $a_0 = 1,\ a_3 = 2$ ו- $a_n = 0$ לכל $n \neq 0, 2$, אפשר לכתוב גם בצורה $1 + 2x^3$.

משפט 6.3.3: $\mathbb{R}[\![x]\!]$ הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה. כמו-כן:

איבר האפס של החוג $\mathbb{R}[\![x]\!]$ הוא הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ שבו $a_n = 0$ לכל $n \geq 0$. איבר האפס יסומן על ידי **0**.

איבר היחידה של החוג $\mathbb{R}[\![x]\!]$ הוא הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ שבו $a_0 = 1$ ואילו $a_n = 0$ לכל $n > 0$. איבר היחידה יסומן על ידי **1**.

הוכחה: קל לוודא שכל האקסיומות של חוג קומוטטיבי מתקיימות. נוכיח כעת שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ שבו $a_0 = 1$ ואילו $a_n = 0$ לכל $n > 0$, הוא אכן איבר היחידה של החוג. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ טור חזקות כלשהו ב- $\mathbb{R}[\![x]\!]$. על פי הגדרת פעולת הכפל ב- $\mathbb{R}[\![x]\!]$ מתקיים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

השוויון האחרון נכון מכיוון ש- $a_0 = 1$ ואילו $a_n = 0$ לכל $n > 0$.

באופן דומה אפשר להוכיח שאיבר האפס הוא הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ שבו $a_n = 0$ לכל $n \geq 0$. □

נשים לב שלא לכל איבר בחוג $\mathbb{R}[\![x]\!]$ יש איבר הופכי. המשפט הבא מאפיין לאילו טורי חזקות יש איבר הופכי בחוג.

משפט 6.3.4: לטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ יש איבר הופכי אם ורק אם $a_0 \neq 0$.

הוכחה: עלינו להוכיח שני כיוונים.

התנאי הכרחי: אם $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ הוא ההופכי של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, אז מתקיים

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = 1 .$$

בפרט $a_0 \cdot b_0 = 1$ ולכן בהכרח $a_0 \neq 0$.

התנאי מספיק: אפשר לבנות את הסדרה $b_0, b_1, \ldots$ באופן הרקורסיבי הבא. צריך להתקיים $a_0 \cdot b_0 = 1$. מכיוון ש- $a_0 \neq 0$ אז $b_0 = \frac{1}{a_0}$. כמו-כן, $a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 0$ ומכאן:

$$b_1 = -\frac{a_1 \cdot b_0}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2} .$$

בדומה $a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = 0$. מכאן:

$$b_2 = \frac{-a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_0}{a_0} = \frac{a_1^2 - a_2 \cdot a_0}{a_0^3}$$

וכך אפשר להמשיך ולהגדיר את הטור כולו (נסו!). □

סימון: במקרה שיש לטור חזקות F איבר הופכי, נסמן כנהוג את הטור ההופכי על ידי F^{-1} או על ידי $\frac{1}{F}$.

טענה 6.3.5: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, או במילים אחרות, הטור $(1-x)$ הפיך והאיבר ההופכי לו הוא הטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

הוכחה: אכן על פי משפט 6.3.4, הטור $(1-x)$ הפיך כיוון שהאיבר החופשי שלו הוא $a_0 = 1$.

כדי להוכיח שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ הוא ההופכי של $(1-x)$, נכפיל את שני הטורים זה בזה על פי ההגדרה של פעולת הכפל. נכתוב תחילה את הטור $(1-x)$ בצורתו האינסופית $(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ ואילו $a_n = 0$ לכל $n \geq 2$. בדומה נכתוב $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ כאשר $b_n = 1$ לכל $n \geq 0$. לכן על פי הגדרת הכפל מתקיים:

$$(1-x) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

כאשר:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = b_n - b_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases},$$

וזאת מכיוון ש- $a_2 = a_3 = \ldots = 0$, ואילו $a_0 = 1$, $a_1 = -1$. קיבלנו אם כן ש- $c_0 = 1$ ואילו $c_n = 0$ לכל $n \geq 1$, כלומר הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ הוא איבר היחידה. לכן, $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ כנדרש. □

דוגמה 6.3.6: נחזור למספרי פיבונאצ׳י ולפונקציה היוצרת המתאימה $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^n$.

על ידי שימוש בנוסחת הנסיגה $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ ובערכי ההתחלה $f(0) = f(1) = 1$, נקבל את סדרת השוויונות הבאים:

$$\begin{aligned}
F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^n &= f(0) + f(1) \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \cdot x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (f(n-1) + f(n-2)) \cdot x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1) \cdot x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2) \cdot x^n \\
&= 1 + x + x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1) \cdot x^{n-1} + x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2) \cdot x^{n-2}
\end{aligned}$$

נזיז את האינדקסים של הסכימה בשורה האחרונה ונקבל:

$$F(x) \quad = \quad 1+x+x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cdot x^n + x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot x^n$$

היות ש- $f(0) = 1$ מקבלים:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1+x+x\cdot\left(F(x)-1\right)+x^2\cdot F(x) \\ &= 1+x\cdot F(x)+x^2\cdot F(x) \end{aligned}$$

כלומר הראינו ש- $F(X)\cdot(1-x-x^2) = 1$, ולכן:

$$. F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

כאן מופיע פולינום ריבועי במכנה. אנו מעדיפים ביטויים הכוללים רק פולינומים ליניאריים במכנה. ומוטב אף ביטויים מהצורה $\frac{1}{1-y}$ (כאשר y תלוי באופן פשוט ב- x), כי הרי ידוע לנו כי $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ (טענה 6.3.5). על מנת להגיע לפולינום ממעלה ראשונה, נפרק תחילה את המכנה לגורמים:

$$.1-x-x^2 = -(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

כאשר x_1,x_2 הם שורשי המשוואה הריבועית $1-x-x^2 = 0$. דהיינו:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

כאמור, עדיף לנו לעבוד עם ביטויים מהצורה $\frac{1}{1-y}$ ולכן נמשיך ונפתח:

$$1-x-x^2 = -(x-x_1)(x-x_2) = -x_1x_2\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)$$

אולם $x_1\cdot x_2 = -1$, ולכן:

$$. 1-x-x^2 = (1+x_1\cdot x)(1+x_2\cdot x)$$

על מנת להגיע לביטוי נוח יותר ל- $F(x)$ נבדוק כי:

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{1+x_1\cdot x}\cdot\frac{1}{1+x_2\cdot x}$$
$$=\left(\frac{1}{1+x_2\cdot x}-\frac{1}{1+x_1\cdot x}\right)\frac{1}{(x_1-x_2)x}=\left(\frac{1}{1+x_2\cdot x}-\frac{1}{1+x_1\cdot x}\right)\frac{1}{x\sqrt{5}}$$

היתרון של הצעד האחרון הוא שעתה מדובר בביטויים מהצורה $\frac{1}{1-y}$, שאנו מחסרים זה מזה ולא כופלים זה בזה (כאן $y=-x_2\cdot x$ או $y=-x_1\cdot x$). כעת על ידי שימוש בטענה 6.3.5 נקבל:

$$F(x)=\frac{1}{x\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x_2\cdot x\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x_1\cdot x\right)^n\right)$$
$$=\frac{1}{x\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-x_2\right)^n-\left(-x_1\right)^n\right)\cdot x^n$$

האיבר הראשון של $n=0$ אינו תורם דבר לסכום ולכן:

$$F(x)=\frac{1}{x\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-x_2\right)^n-\left(-x_1\right)^n\right)\cdot x^n$$
$$=\frac{1}{x\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-x_2\right)^{n+1}-\left(-x_1\right)^{n+1}\right)\cdot x^{n+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-x_2\right)^{n+1}-\left(-x_1\right)^{n+1}\right)\cdot x^n$$

לכן, לכל $n\geq 0$:

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(-x_2\right)^{n+1}-\left(-x_1\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

כפי שכבר ראינו בשיטות אחרות (ראו תרגיל 1 בסעיף 3.4, וסעיף 6.2 בפרק זה).

בחוג $\mathbb{R}[\![x]\!]$ ניתן להגדיר גם פעולות נוספות המוכרות לנו מהאנליזה המתמטית. אין קושי להגדיר חזקות $F^k(x)$ באמצעות שימוש חוזר בהגדרת הכפל, וזאת לכל $k\geq 0$ טבעי. אבל מעניין יותר (ופחות מובן מאליו) להגדיר גם חזקות שבריות. כך למשל, נגדיר $G(x)=\left(F(x)\right)^{1/2}$ כש-F,G טורי חזקות פורמליים באמצעות היחס $\left(G(x)\right)^2=F(x)$.

טענה 6.3.7: $\sqrt{1-x}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^n$.

הוכחה: מה פירוש השוויון הזה? אם נעלה את שני האגפים בריבוע, עלינו להראות כי:

$$(1-x)=\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^n\right)^2$$

נסמן:

$$a_n=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

אנו טוענים לכן כי:

$$(1-x)=\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2.$$

כדי לקבל תחושה, תרצו אולי לוודא כי $a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{8},\quad a_3=\frac{1}{16},\quad a_4=\frac{5}{128}$ וכן הלאה.

כמו-כן נעיר כי:

$$a_n=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot C(n-1)$$

כש- $C(n-1)$ הוא מספר קטלן ה- $(n-1)$, וזאת מכיוון ש- $C(n-1)=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ (ראו משפט 4.3.11).

משמעות הטענה שאנו מנסים להוכיח היא שאם נעלה בריבוע את טור החזקות הפורמלי $1-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, נקבל את טור החזקות הפורמלי $(1-x)$. פירוש הדבר ששני המקדמים הראשונים של $\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2$ יוצאים 1 ו- (-1), ומשם ואילך כל המקדמים שווים לאפס. נשתמש בנוסחת הכפל של טורי חזקות כדי לוודא זאת. עלינו לברר כי:

א. המקדם של x^0 הוא $1^2=1$.

ב. המקדם של x^1 הוא $-2a_1=-1$ ואכן $a_1=½$.

ג. לכל $n\geq 2$: $2a_n-\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}=0$.

יש לבדוק אם כן רק ש- ג' מתקיים. זאת אומרת עלינו לבדוק כי:

$$2a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}.$$

דהיינו:

$$4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot C(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot C(k-1)\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\cdot C(n-k-1)$$

ולאחר צמצום:

$$C(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}C(k-1)C(n-k-1).$$

זו בדיוק נוסחת הנסיגה של מספרי קטלן (ראו משפט 4.4.9), ואת נכונותה כבר הוכחנו. □

טענה 6.3.8: $\sqrt{1-4x}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^{n}$.

הוכחה: זו כמובן מסקנה פשוטה המתקבלת מהצבת $4x$ במקום x בטענה 6.3.7, אולם נוכיח זאת בדרך אחרת. ואכן, על ידי שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון עבור מקדמים בינומיים עם מספרים ממשיים כלשהם (משפט 4.7.3):

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4x} &= (1-4x)^{1/2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^{n}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^{n}\end{aligned}$$

אולם לפי תרגיל 4 בסעיף 4.7, לכל $n>0$ מתקיים:

$$\binom{1/2}{n}=\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n}}\cdot\frac{2}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4x} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n}}\cdot\frac{2}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^{n}\\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^{n}\end{aligned}$$

ובכך הסתיימה ההוכחה. □

לעתים, יש צורך להשתמש בפעולות נוספות על איברי החוג $\mathbb{R}[[x]]$, כגון פעולת הנגזרת והאינטגרל. פעולות אלה מוגדרות באופן הבא:

הגדרה 6.3.9: יהי $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בחוג $\mathbb{R}[\![x]\!]$.

1. **הנגזרת** של $F(x)$ מוגדרת על ידי:
$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}x^n .$$

2. **האינטגרל** של $F(x)$ לפי x עם מקדם חופשי c מוגדר על ידי:
$$\int F(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}+c .$$

קל לוודא שמתקיים $\left(\int F(x)dx\right)'=F(x)$. זהו האנלוג האלגברי למשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי. אין זה מובן מאליו (אך זה נכון) שמושגי הנגזרת והאינטגרל כפי שהגדרנו כאן משתלבים היטב בעולם המוכר לנו של החשבון הדיפרנציאלי. זהו אכן המצב, ההצדקות הדרושות אינן קשות ולא נביא אותן כאן, אך נרצה לפחות להמחיש מדוע נדרשת כאן הצדקה.

כפי שראינו $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. נזכור ששוויון זה משמעותו היא שאם כופלים את טור החזקות $(1-x)$ בטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ מתקבל טור החזקות 1. כיוצא בזה ראינו גם ש-
$$\sqrt{1-x}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^n .$$

משמעות הדבר היא שאם מעלים את טור החזקות $1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^n$ בריבוע מתקבל טור החזקות $(1-x)$. אבחנות אלה מאפשרות לנו לראות פונקציות ממשיות מסוימות כגון $\frac{1}{1-x}$ או $\sqrt{1-x}$, וגם פונקציות כמו $\arcsin\sqrt{1-x^2}$ וכו', כשייכות לחוג טורי החזקות הפורמליים.

הבעיה המתעוררת היא זו: אם מחשבים את הנגזרת של פונקציה כגון $\frac{1}{1-x}$ **כפונקציה ממשית** (כפי שלומדים לגזור בחשבון דיפרנציאלי), האם הנגזרת הזו מתלכדת עם מושג הנגזרת כמוגדר בתורה של טורי חזקות פורמליים (כפי שהגדרנו כאן)?

התשובה חיובית וההוכחה אינה קשה אך לא נפתח אותה כאן. באופן עקרוני, יש להראות שניתן לחזור ולפתח במסגרת התורה של טורי חזקות פורמליים, את כל החומר הבסיסי בנגזרות, כגון נוסחת הנגזרת של מכפלה, של מנה, של הרכבת פונקציות וכו'. מקצת מכך יוצג בתרגילים.

דוגמה 6.3.10: כאמור הוכחנו בטענה 6.3.5 ש- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. ברצוננו לגזור את שני אגפי השוויון הזה. הנגזרת של $\frac{1}{1-x}$ כפונקציה ממשית היא $\frac{1}{(1-x)^2}$. הנגזרת של $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ לפי הגדרת הנגזרת של טורי חזקות פורמליים היא: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$. נראה כעת כי:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n .$$

עלינו להראות כי $\frac{1}{(1-x)^2}$ הוא ההופכי של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$. כלומר נראה כי:

$$(1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1$$

נשתמש בנוסחת המכפלה של טורי חזקות ונבדוק מהם המקדמים המתקבלים:

א. המקדם של x^0 הוא אכן $1\cdot 1 = 1$.
ב. המקדם של x^1 הוא $1\cdot 2 - 2\cdot 1 = 0$.
ג. עתה נחשב את המקדם של x^n לכל $n \geq 2$. ואכן, לפי נוסחת המכפלה, המקדם של x^n הוא: $1\cdot(n+1) - 2\cdot n + 1\cdot(n-1) = 0$ כנדרש.

דוגמה 6.3.11 (מספרי קטלן): בסעיף 4.3, הגדרנו את המושג של סדרות מאוזנות של אפסים ואחדים (כזכור סדרה מאוזנת היא סדרה שבה מספר האפסים שווה למספר האחדים, וכן בכל רישא של הסדרה מספר האפסים גדול או שווה למספר האחדים). לא התקשינו להראות שהמספר $C(n)$ של סדרות מאוזנות שכוללות n אפסים ו- n אחדים מקיים את נוסחת הנסיגה הבאה (ראו משפט 4.4.9):

$$C(0) = 1, \quad C(1) = 1$$

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n} C(k-1)C(n-k) \quad \text{לכל } n > 1 .$$

כזכור המספר $C(n)$ נקרא מספר קטלן. עתה נראה איך למצוא את הביטוי המפורש ל- $C(n)$ על ידי שימוש בפונקציות יוצרות. זו דוגמה אחת מני רבות לכוחה של השיטה הזאת.

תהי $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n)x^n$ הפונקציה היוצרת לסדרה $C(0), C(1), C(2), \ldots$. נוסחת הנסיגה ל- $C(n)$ מזכירה מאוד את הנוסחה לכפל פונקציות יוצרות. לכן מתבקש לחשב את המכפלה $F(x)\cdot F(x)$. נסמן כמקובל מכפלה זו על ידי $F^2(x)$. ואכן לפי ההגדרה של כפל טורי חזקות מתקיים:

$$F^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C(n)x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} C(n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C(k)C(n-k)\right)x^n$$

ואולם על פי נוסחת הנסיגה של מספרי קטלן מתקיים:

$$C(n+1)=\sum_{k=0}^{n}C(k)C(n-k)$$

(שימו לב שהזזנו את האינדקסים של הסכימה). לכן,

$$F^2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C(n+1)x^n \ .$$

נכפול את שני האגפים ב- x ונקבל:

$$xF^2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C(n+1)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}C(n)x^n=F(x)-1$$

כלומר הפונקציה היוצרת $F(X)$ מקיימת את המשוואה הריבועית $xF^2(x) - F(x) + 1 = 0$.
שורשי המשוואה הריבועית הזאת הם:

$$F(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x} \ .$$

לפי טענה 6.3.8:

$$\sqrt{1-4x}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^n \ .$$

עלינו לקבוע עדיין מהו הסימן שבו נשתמש בביטוי $F(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$. ואולם, ידוע לנו שכל המקדמים $C(n)$ בפיתוח של $F(X)$ הם חיוביים (משום שהם מונים את מספר הסדרות המאוזנות, ומספר זה כמובן חיובי). לכן עלינו לבחור בסימן המינוס, מפני שבטור $\sqrt{1-4x}$ המקדם של x^n כש- $n > 1$ הוא שלילי. לכן:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\\
&= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n
\end{aligned}$$

ולכן $C(n)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, כפי שגם ראינו בסעיף 4.3. אך כאמור כאן, הגענו אל הפתרון בעזרת השיטה הכללית של פונקציות יוצרות, ולא באמצעות רעיון ספציפי כפי שעשינו בפרק 4.

הוכחת זהויות קומבינטוריות

פונקציות יוצרות הן כלי חזק לפתרון מגוון רחב של בעיות. נתבונן בדוגמה הבאה.

דוגמה 6.3.12: נוכיח את הזהות הבאה:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k} \quad \text{כאשר } n,m\geq k$$

(הוכחה קומבינטורית ניתנה כבר בתרגיל 4, סעיף 4.3.). להלן הוכחה חלופית בעזרת פונקציות יוצרות. כזכור על פי נוסחת הבינום של ניוטון (ראו משפט 4.3.1):

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i=(1+x)^n, \qquad \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j=(1+x)^m$$

כאשר נכפיל את שני הביטויים זה בזה נקבל:

$$\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right]=(1+x)^{n+m}.$$

בשני האגפים מופיעים פולינומים זהים ב- x. נשווה את המקדם של x^k בשניהם. איברים המכילים את x^k יופיעו באגף שמאל על ידי כפל של איבר מהסכום הראשון המכיל את x^i באיבר מהסכום השני שמכיל את x^{k-i}. דהיינו, האיבר המתאים לאינדקס $j=k-i$. הדיון הזה תקף לכל $0\leq i\leq n$ ולכל $0\leq j\leq m$ המקיימים $i+j=k$. לכן, המקדם של x^k באגף שמאל הוא:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

מאידך, המקדם של x^k באגף ימין, כלומר בביטוי $(1+x)^{n+m}$, הוא לפי נוסחת הבינום של ניוטון $\binom{n+m}{k}$. בזאת הוכחה הזהות.

בין העובדות היסודיות ביותר בפרק זה נמנית הנוסחה לכפל של שני טורי חזקות:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

כאשר $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. מה בדבר מכפלות של יותר משני טורי חזקות? למשל, מכפלה של שלושה טורים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

איך נבטא את a_n באמצעות $\{\alpha_i\},\ \{\beta_i\},\ \{\gamma_i\}$? לא קשה להוכיח (ראו תרגיל 7) כי $a_n=\sum \alpha_i\beta_j\gamma_k$ כאשר הסכום הוא על פני כל השלשות i, j, k כך ש- $i + j + k = n$. הטענה הבאה מכלילה דוגמה זאת למכפלה של מספר כלשהו של טורי חזקות.

טענה 6.3.13: נביט ב- k טורי החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{j,n}x^n$ כאשר $1 \le j \le k$, ותהיה מכפלתם: $\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{j,n}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. אז $a_n=\sum \alpha_{1,i_1}\cdots\alpha_{k,i_k}$, כאשר הסכום הוא על כל הבחירות של אינדקסים $i_1,\ldots,i_k$ המקיימים $i_1 + \ldots + i_k = n$.

הוכחה: באינדוקציה על k. □

לעתים קרובות אנו עוסקים בטורי חזקות שבהם כל המקדמים הם רק 0 או 1. טור חזקות כזה נראה כ: $\sum_{n\in S}x^n$, כאשר $S\subseteq\mathbb{N}$ קבוצה כלשהי של מספרים טבעיים. כך למשל, אם S היא קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים אז $\sum_{n\in S}x^n=\frac{1}{1-x^2}$ (ראו תרגיל 6). במקרה הפרטי הזה לובשת טענה 6.3.13 את הצורה הבאה:

טענה 6.3.14: יהיו $S_1,\ldots,S_k\subseteq\mathbb{N}$ קבוצות של מספרים טבעיים. אז $\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{n\in S_i}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, כאשר a_n הוא מספר הייצוגים של n כסכום $i_1 + \ldots + i_k = n$ עם $i_1\in S_1,\ldots,i_k\in S_k$.

נשתמש עתה בטענה הנ"ל כדי להוכיח זהות קומבינטורית נוספת.

דוגמה 6.3.15: נוכיח להלן כי $\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n$ (להוכחה חלופית ראו תרגיל 4).

נשתמש במכפלה של טורי חזקות כדי לחשב את טור החזקות השווה לטור $\frac{1}{(1-x)^k}$. לפי טענה 6.3.5 מתקיימת הזהות הבאה:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

נעלה את שני האגפים בחזקת k:

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

ברצוננו לחשב את המקדמים a_n. נשים לב שכל המקדמים בפיתוח של הטור $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ הם 1. לכן לפי טענה 6.3.14, המקדם a_n הוא מספר הבחירות של אינדקסים $i_1,\ldots,i_k$ כך ש-$n = i_1 + \ldots + i_k$. אולם מספר זה הוא $\binom{n+k-1}{k-1}$ (ראו דוגמה 4.2.17). קיבלנו לכן את הזהות:

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n.$$

חלוקות של מספר

הגדרה 6.3.16: חלוקה של מספר טבעי n זו סדרה $(a_1,\ldots,a_k)$ של מספרים טבעיים $a_1 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$ המקיימים $n = a_1 + \ldots + a_k$. במקרה זה אומרים שזו חלוקה של n ל- k **חלקים**, והמספרים a_i נקראים **החלקים**.

אנו נרצה למנות את מספר החלוקות השונות של מספר n. למשל, אם n = 5 יש שבע חלוקות אפשריות והן:

(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1)

העיסוק בחלוקות הוא פרק בתורת המספרים הקלאסית שהעסיקה מתמטיקאים רבים כגון אוילר, ובדורות המאוחרים יותר את רמנוג׳אן. פונקציות יוצרות נמנות בין הכלים החשובים לטיפול בחלוקות. נדגים זאת על ידי הוכחת המשפט הבא של אוילר.

משפט 6.3.17 (אוילר): לכל n, מספר החלוקות של n לחלקים שונים שווה למספר החלוקות של n לחלקים שכולם אי-זוגיים.

דוגמה 6.3.18: בין החלוקות שמנינו לעיל ל- $n = 5$, בחלוקות $(3,2)$, $(4,1)$, (5) כל החלקים שונים, ואילו בחלוקות $(1,1,1,1,1)$, $(3,1,1)$, (5) כל החלקים אי-זוגיים. ואכן, בשני המקרים מדובר בשלוש חלוקות.

הוכחת משפט 6.3.17: לכל n, נגדיר את a_n כמספר החלוקות של n לחלקים שונים, ואת b_n כמספר החלוקות של n לחלקים אי-זוגיים. אנו נראה כי $a_n = b_n$ לכל n, על ידי כך שנוכיח כי הפונקציות היוצרות המתאימות מתלכדות, כלומר $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. ניגש לחישוב הפונקציות היוצרות הללו.

טענה 6.3.19: יהי a_n מספר החלוקות של n לחלקים שונים. אז:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots .$$

הוכחה: כאשר אנו מכפילים את הגורמים $(1+x), (1+x^2), \ldots$, אנו יכולים לבחור מכל גורם מהצורה $(1 + x^j)$ את 1 או את x^j. נניח, למשל, שאנו בוחרים את x^2 מ- $(1+x^2)$, את x^5 מ- $(1+x^5)$, את x^8 מהגורם $(1+x^8)$, ומכל יתר הגורמים אנו בוחרים את 1. בחירה זו נותנת לנו $x^{2+5+8} = x^{15}$. באופן כללי אנו מקבלים x^n כנגד כל בחירה של 1 או x ב- $(1+x)$, של 1 או x^2 ב- $(1+x^2)$ וכן הלאה, כאשר מכפלת הגורמים מהצורה x^j, כאשר $x^j \neq 1$, היא x^n. פירוש הדבר הוא שאנו מקבלים תרומה של 1 למקדם של x^n על כל הצגה של x^n כמכפלה של גורמים x^j השונים זה מזה ובנוסף $j \geq 1$. או כשמתבוננים במעריך: המקדם של x^n הוא מספר החלוקות של n לחלקים שונים, כפי שטענו. □

הערה: יש לציין כי מכפלות אינסופיות כמו בביטוי $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ כלל לא הוגדרו עד כאן. לכן נדרשת הבהרה למה בעצם אנחנו מתכוונים בטענה כמו:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots .$$

ובכן, כשקובעים n טבעי כלשהו ורוצים לדעת איך להגדיר את המקדם של x^n בביטוי $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$, שמים לב שבגורמים מהמקום ה- $n+1$ ואילך $\ldots,(1+x^{n+1}), (1+x^{n+2})$ בהכרח נבחר את 1 ולא את x^j. ההגדרה הפורמלית המתבקשת נובעת אם כן: הטור $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ הוא טור החזקות הפורמלי שבו המקדם של x^n הוא המקדם של x^n במכפלה הסופית $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)$. נוסיף ונאמר ששיקולי זהירות דומים לאלה יידרשו גם בהמשך הדיון, אך לא יפורטו במלואם.

טענה 6.3.20: יהי b_n מספר החלוקות של n לחלקים אי-זוגיים. אז:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = (1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)\cdots$$

הוכחה: נפתח את המכפלה הבאה לטור חזקות:

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)\cdots .$$

כל מחובר מתקבל מבחירה של אחד המחוברים מהטור הראשון $(1+x+x^2+x^3+\ldots)$, אחד מהטור השני $(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)$ וכך הלאה. נניח שבחרנו את x^{j_1} בטור הראשון, את $x^{3\cdot j_2}$ בטור השני, $x^{5\cdot j_3}$ בטור השלישי וכך הלאה, והבחירה הזו תרמה למקדם של x^n בטור החזקות (כלומר, החזקות הסתכמו ל- n). לבחירה זו מתאימה החלוקה הבאה של n:

$$n = \underbrace{1+\ldots+1}_{j_1} + \underbrace{3+\ldots+3}_{j_2} + \underbrace{5+\ldots+5}_{j_3} + \ldots ,$$

וזוהי חלוקה של n לחלקים אי-זוגיים (לאו דווקא שונים). זו ההתאמה חח״ע, ולכן המקדם של x^n שווה למספר החלוקות של n לחלקים אי-זוגיים. בכך מוכחת הטענה. □

כעת אנחנו יכולים לסיים את הוכחת משפט אוילר.

המשך הוכחת משפט 6.3.17: נוכיח כעת ש- $a_n = b_n$ לכל n. נשים לב תחילה כי:

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+x^3+\ldots &= \frac{1}{1-x} \\ 1+x^3+x^6+x^9+\ldots &= \frac{1}{1-x^3} \\ 1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots &= \frac{1}{1-x^5} \end{aligned}$$

לכן, לפי טענה 6.3.20,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots .$$

מכאן על ידי שימוש בטענה 6.3.19 די להוכיח כי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots .$$

נפתח את אגף שמאל:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdot(1+x^4)\cdots = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots .$$

כאן השתמשנו בזהות $(1+x^k)(1-x^k) = (1-x^{2k})$. המונים מהצורה $1-x^{2j}$ מצטמצמים עם הביטויים המתאימים במכנה, ורק הגורמים $1-x^t$ כאשר t אי-זוגי נשארים במכנה. כלומר,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdot(1+x^4)\cdots=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots.$$

נחזור ונעיר שוב: על מנת לבצע את החישוב הזה באופן מלא, נדרש דיון כמו שראינו בהערה בעקבות הוכחת טענה 6.3.19. ההוכחה בצורתה המלאה והמפורטת מסתמכת על כך שהמקדם של x^n במכפלה $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ נקבע בעצם רק על ידי הגורמים מהצורה $(1+x^j)$ כאשר $j \le n$. □

נעיר לסיום שעל אף פשטות ההגדרה של חלוקות, אין נוסחה סגורה למספר החלוקות של מספר n. יש נוסחאות אסימפטוטיות למספר החלוקות, אך לא נדון בכך בספר זה (ראו פרק 7 לדיון במושג קצב גידול אסימפטוטי).

תרגילים

1. יהי $(R,+,\cdot)$ חוג עם איבר יחידה 1_R, ויהי a איבר בחוג. הוכיחו שאם קיים ל- a איבר הופכי אז הוא יחיד. כלומר, הראו שאם קיימים שני איברים $b_1,b_2\in R$, כך ש- $a\cdot b_1 = b_1\cdot a = 1_R$ וכן $a\cdot b_2 = b_2\cdot a = 1_R$, אז $b_1 = b_2$.

2. כמה מעגלים מאורך n יש בגרף השלם K_r? ניתן לנסח את הבעיה גם כך: נאמר שמילה הבנויה מאותיות הא"ב $\{1,\ldots,r\}$ היא **חוקית**, אם כל שתי אותיות עוקבות בה הן שונות. הבעיה היא אם כן למצוא כמה מילים חוקית יש מאורך n, כך שהאות הראשונה והאחרונה שלהן זהות. נסמן את המספר הזה ב- $a(n)$ (על המספר r אנחנו חושבים כעל גודל קבוע והוא יופיע כמובן בביטוי ל- $a(n)$).
   א. הוכיחו כי מספר המילים החוקיות הוא $r(r-1)^{n-2}$.
   ב. כל מילה חוקית מאורך n המתחילה ומסתיימת באותה אות, מתקבלת מהארכה של מילה חוקית באורך $n-1$ שבה האות האחרונה דווקא **שונה** מהאות הראשונה. לכן מתקבלת נוסחת הנסיגה הבאה:
   $$a(2) = 0,$$
   $$a(n) = r(r-1)^{n-2} - a(n-1) \quad \text{לכל } n > 2.$$
   הסבירו מדוע הנוסחה אכן נכונה.
   ג. פתרו את נוסחת הנסיגה ומצאו ביטוי מפורש ל- $a(n)$.

3. יהיו F,G טורי חזקות.
   א. הוכיחו את הנוסחה לנגזרת של מכפלה: $(F\cdot G)' = F'\cdot G + F\cdot G'$.
   הדרכה: השתמשו בהגדרת הכפל ובהגדרת הנגזרת של טורי חזקות פורמליים.
   ב. הוכיחו את הנוסחה לנגזרת של מנה: $\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'\cdot G - F\cdot G'}{G^2}$.
   כאן G איבר הפיך ב- $\mathbb{R}[x]$ והטור $\frac{1}{G}$ הוא ההופכי של G.

הדרכה: הגדירו את הטור $H=\frac{F}{G}$, והפעילו את הנוסחה לנגזרת של מכפלה על $G\cdot H = F$.

4. הוכיחו כי לכל $k \ge 0$ טבעי מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

הדרכה: הוכיחו זאת באינדוקציה על k והשתמשו בנגזרות.

5. הוכיחו כי $\binom{-k}{n} = (-1)^n\binom{k+n-1}{n}$ על ידי השוואת מקדמים בטורי החזקות המתאימים.

6. הוכיחו כי אם S היא קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים אז $\sum_{n\in S} x^n = \frac{1}{1-x^2}$.

7. נתבונן במכפלה של שלושה טורי חזקות:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n .$$

הוכיחו כי $a_n = \sum \alpha_i\beta_j\gamma_k$, כאשר הסכום הוא על פני כל השלשות i, j, k המקיימות $i + j + k = n$.

8. נתונים אינסוף טורי חזקות פורמליים $F_1, F_2, \ldots$ עם מקדמים שלמים אי-שליליים. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שהמכפלה $\prod_{i=1}^{\infty} F_i$ מוגדרת.

9. תהיה $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_k \ge 1$ חלוקה של n. אומרים שהחלוקה **סימטרית** אם a_1 שווה למספר ה- a_i שהם ≥ 1 (דהיינו $a_1 = k$), a_2 שווה למספר ה- a_i שהם ≥ 2, a_3 הוא מספר ה- a_i שהם ≥ 3, וכן הלאה. למשל, הנה חלוקה סימטרית של $n = 25$:

$a_1 = 8, a_2 = 5, a_3 = 4, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 = a_7 = a_8 = 1$.

הוכיחו לכל n, שמספר החלוקות הסימטריות של n שווה למספר החלוקות של n לחלקים אי-זוגיים שונים.

הדרכה: חפשו הוכחה ישירה על ידי התאמה חח"ע ולא על ידי שימוש בפונקציות יוצרות.

הערות היסטוריות

סריניווסה איינגר רמנוג'אן Srinivasa Aiyangar Ramanujan (הודו 1887-1920). היה אחת מן הדמויות החריגות במובנים רבים בתולדות המתמטיקה. בהיותו בן 15 הוא קרא את הספר Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics של ג'ורג' קאר George

Carr. רמנוג׳אן לימד את עצמו מתמטיקה בעזרת הספר, וניסה בעקבות זאת להוכיח משפטים חדשים בעצמו. אולם מכיוון שהספר פורסם ב- 1856, היו חלק מהשיטות והתוצאות שבו לא מעודכנות בשלב שבו קרא אותו רמנוג׳אן. רבים רואים את רמנוג׳אן כאחד הכשרונות הגדולים ביותר בכל תולדות המתמטיקה. למרות העובדה שהיה מנותק ממרכזי המתמטיקה של זמנו הוא הצליח להגיע להישגים ניכרים לגמרי בכוחות עצמו.

ב- 1903 הוא קיבל מלגה לקולג׳, אולם המלגה נלקחה ממנו שנה אח״כ, מכיוון שהוא הקדיש את כל זמנו ללימודי המתמטיקה והזניח את יתר הנושאים. למרות זאת הוא המשיך בחקר המתמטיקה וחי בעוני גדול. ב- 1911 הוא פרסם את המאמר הראשון שלו והתחיל להתפרסם. הוא החל להתכתב עם המתמטיקאי האנגלי גודפרי הארדי Godfrey Hardy, ושלח לו את התוצאות והמשפטים שהוא הוכיח. הארדי ענה לרמנוג׳אן שחלק מהתוצאות כבר ידועות, אולם יש ביניהן גם חדשות ומעניינות. בעקבות זאת הצליח הארדי להביא את רמנוג׳אן לאנגליה ב- 1914 כדי ללמוד בטריניטי קולג׳ ולהמשיך אתו במחקר משותף. רמנוג׳אן שהיה צמחוני ודתי התלבט רבות האם לנסוע, אולם בסוף השתכנע. הוא סבל מבעיות בריאות קשות וכן ממזג האוויר. ב- 1919 הוא חזר להודו ומת שם כעבור שנה.

בין הנושאים שרמנוג׳אן עבד עליהם היו תורת המספרים, פונקציות אליפטיות, שברים משולבים, סדרות היפרגיאומטריות, פונקצית זטה, וטורים אינסופיים. אולם בגלל הפערים הגדולים בהשכלתו היו חלק מהמשפטים שהוא הוכיח שגויים. בין עבודותיו הידועות ביותר מצויים מחקריו על המספר $p(n)$, שהוא מספר החלוקות של מספר n. יחד עם הארדי הוא פרסם מאמר המתאר קירוב אסימפטוטי של $p(n)$. רבים מהמשפטים שרמונג׳אן שיער בתחום החלוקות ובתחומים אחרים הוכחו כנכונים לאחר מותו.

רמנוג׳אן הצטיין בכושר חישוב נדיר. בין האנקדוטות המסופרות עליו ידוע הסיפור הבא: כשהיה רמנוג׳אן חולה בבית חולים באנגליה, בא הארדי לבקרו. בבואו אמר הארדי לרמנוג׳אן: ״מספרה של המונית שהביאה אותי הוא 1729, מספר משעמם״. ״לא ולא הארדי״ השיב רמנוג׳אן. ״זהו המספר הקטן ביותר שניתן להציג בשני אופנים שונים כסכום של חזקות שלישיות״. ואכן, $1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$, וגם $1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$.