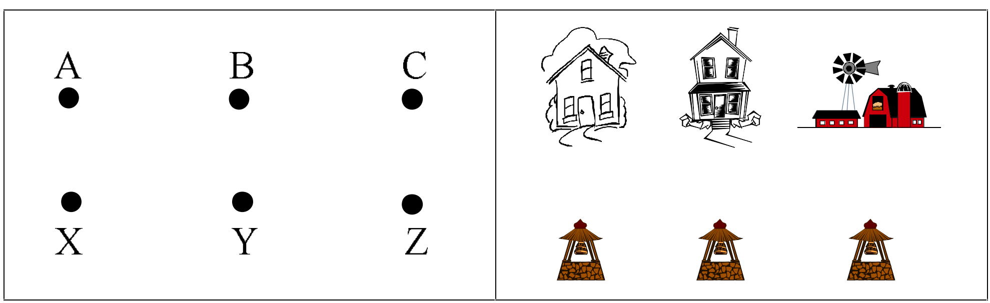
5. תורת הגרפים

כבר נתקלנו במושג הגרף בספר זה. במילים פשוטות גרף מורכב מ״נקודות וקווים המחברים ביניהן״ (קדקודים וצלעות בשפתנו). ניתן גם להגדיר גרפים באמצעות המינוחים של יחסים בינאריים כפי שפיתחנו בסעיף 1.3. אולם, מוטב אולי להתחיל במספר דוגמאות שימחישו את השימושיות הרבה של גרפים.

דוגמה 5.1: בעיית האיכרים והבארות
בכפר כלשהו חיים שלושה איכרים המתגוררים בבתים A,B,C כבציור. יש בכפר גם שלוש בארות מים X,Y,Z כבתרשים 5.1. כל איכר רוצה לחבר את ביתו בתעלה לכל אחת מהבארות ואסור כמובן שהתעלות יחצו זו את זו. האם הדבר אפשרי?



תרשים 5.1: הגרף המתאים לבתים ולבארות.

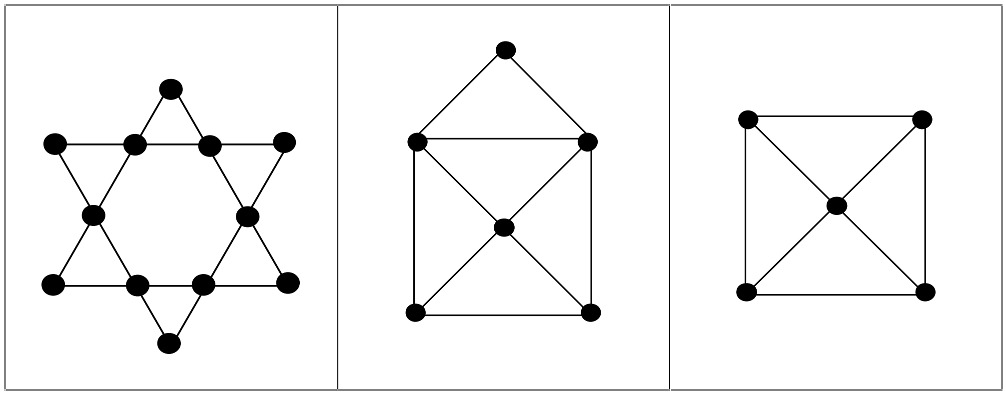
במונחים של תורת הגרפים, אנו שואלים כאן האם הגרף בעל קבוצה של שישה קדקודים {A,B,C,X,Y,Z} וקבוצת הצלעות:

$$\{\{A,X\},\{A,Y\},\{A,Z\},\{B,X\},\{B,Y\},\{B,Z\},\{C,X\},\{C,Y\},\{C,Z\}\}$$

ניתן לציור במישור. התשובה שלילית כפי שנראה בהמשך.

דוגמה 5.2: בעיית אוילר לגרפים

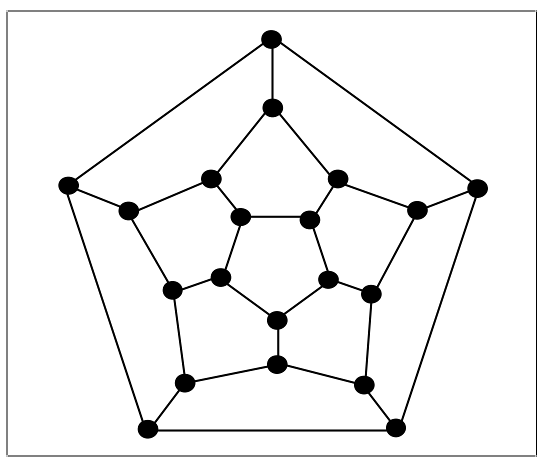
האם ניתן לצייר את הציור הימני בתרשים 5.2 במשיכת קולמוס אחת, דהיינו, תוך העברה רציפה של העט, בלי לחזור על אותו הקדקוד פעמיים? בהמשך נפתח כלים שיאפשרו לנו להוכיח שהתשובה שלילית. מאידך גיסא, את הציור האמצעי בתרשים 5.2 אכן ניתן לצייר במשיכת קולמוס אחת. כיצד? אתגר קצת יותר קשה הוא לצייר כך מגן-דוד, כמו בתרשים 5.2 משמאל. האם תוכלו לעשות זאת?



תרשים 5.2: שלושה גרפים.

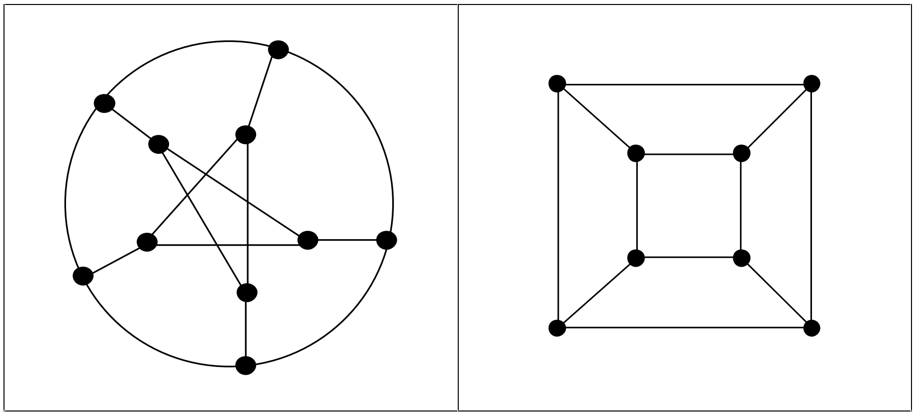
דוגמה 5.3: בעיית המילטון לגרפים

בבעיה הקודמת דנו בשאלה איך לעבור ברצף על **הצלעות** של גרף נתון, על כל צלע פעם אחת בדיוק. כאן נשאל שאלה דומה בדבר מעבר על **הקדקודים** של גרף נתון. ובכן, האם תוכלו למצוא דרך לעבור על הקדקודים של הגרפים הבאים, כך שתבקרו בדרך בכל קדקוד פעם אחת בדיוק? (במקרה זה אין צורך לעבור על כל הצלעות.) המילטון הציג את השאלה לגרף שבתרשים 5.3.



תרשים 5.3: גרף המילטון.

האם תוכלו להכריע את השאלה לגרפים בתרשים 5.4?



תרשים 5.4 : מימין הגרף של הקוביה התלת-ממדית ומשמאל גרף פטרסן.

דוגמה 5.4: מעגלים
לגרף פטרסן בתרשים 5.4 משמאל, יש התכונה המופלאה הבאה: אין בו משולשים או מרובעים. דהיינו, אם יוצאים מקדקוד ומתקדמים בכל פעם לקדקוד שכן (אך בלי לסגת מיד לקדקוד שממנו באנו), צריך לצעוד לפחות חמישה צעדים על מנת לחזור לקדקוד המוצא (בדקו). נביט בגרף d – רגולרי, היינו גרף שבו לכל קדקוד יש בדיוק d שכנים ואין בו משולשים או מרובעים. מהו המספר המזערי של קדקודים בגרף כזה? לא קשה להראות שהמספר הוא לפחות d^2+1. אכן בגרף פטרסן $d = 3$ ומספר הקדקודים הוא $3^2+1 = 10$. ידועות עוד שתי דוגמאות מסוימות של גרפים d – רגולריים בעלי d^2+1 קדקודים שאין בהם משולשים ומרובעים. כמו-כן, ידוע שיש לכל היותר עוד דוגמה אחת נוספת: גרף d – רגולרי כש- $d = 57$, אולם לא ידוע אם גרף כזה אכן קיים. שקיומו אפשרי אך מוטל בספק. מלבד מקרים אלה ידוע שאין עוד גרפים d – רגולריים בעלי d^2+1 קדקודים ללא משולשים ומרובעים. לערכים כלליים של d זו עדיין בעיה פתוחה למצוא את המספר המזערי של קדקודים בגרף d – רגולרי חסר משולשים ומרובעים.

חשיבותה של תורת הגרפים נובעת, בין היתר, מהיותה מסגרת כללית המאפשרת לטפל במגוון עצום של בעיות מכל תחומי המדע והטכנולוגיה. להלן כמה דוגמאות אופייניות:

פיזיקה/הנדסת חשמל: רשת חשמלית ניתנת לייצוג באמצעות גרף. הקדקודים של הגרף הם הצמתים של הרשת, וצלעות הגרף הן המוליכים ברשת חשמלית. הדיון ברשתות חשמליות הוביל לפיתוח כמה עקרונות יסודיים של תורת הגרפים.

אופטימיזציה: נניח שלפני מנהל מפעל יש רשימה של משימות לביצוע ורשימה של עובדי המפעל. כמו-כן, ידוע אילו משימות יכול כל עובד לבצע ואילו משימות אינו יכול לבצע. מטרת המנהל להטיל על עובדיו משימות כך שכולם יהיו מועסקים. מתי ניתן הדבר לביצוע?
נמשיך ונניח שכל משימה מתבצעת ביחידת זמן אחת (נניח בשעה אחת). עתה מטרת המנהל היא להציב את האנשים למשימות כך שכל המשימות תתבצענה מהר ככל האפשר. הבעיה הראשונה

מנוסחת בשפת תורת הגרפים כבעיה של מציאת זיווגים בגרפים. הבעיה השנייה היא השאלה של קיום צביעה של צלעות הגרף. בשאלות אלה ואחרות נדון בהמשך פרק זה.

5.1. מונחים בסיסיים מתורת הגרפים

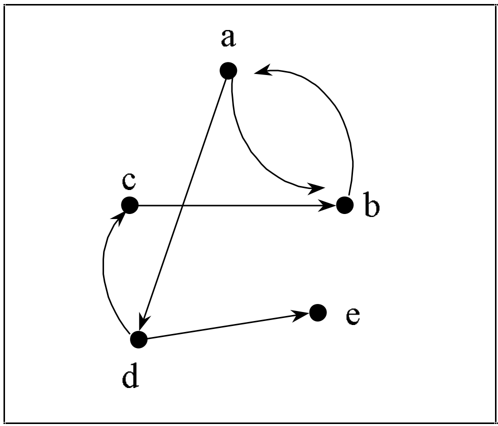
הנושאים שיוצגו: *גרף מכוון ולא-מכוון, קדקודים וצלעות, מולטי-גרף ופסאודו גרף, קדקודים שכנים, דרגה, מסלול, מעגל, מרחק, קוטר, מטריקה, קשירות, רכיבי קשירות, תת-גרף, תת-גרף פורש, גרף משלים, מטריצת שכנות.*

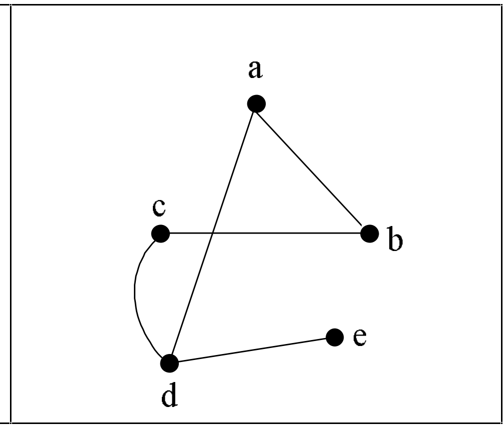
כרגיל נפתח תחילה בהגדרת המושגים הבסיסיים הקשורים בתורת הגרפים, ובראשם כמובן מושג הגרף עצמו. למעשה כבר נתקלנו במושג הגרף בסעיף 1.3, כאשר תיארנו יחס בינארי R על קבוצה כלשהי A. במקרה זה ייצגנו כל איבר ב- A על ידי נקודה וציירנו חץ מ- a ל- b אם $(a,b)\in R$. דרך התיאור הסכמטית הזאת נקראת גם גרף מכוון. פורמלית נגדיר גרף כך:

הגדרה 5.1.1: תהי V קבוצה סופית לא ריקה, ותהי E קבוצה של זוגות איברים שונים מתוך V.
הזוג $G = (V,E)$ נקרא **גרף לא-מכוון**, אם E קבוצה של זוגות לא-סדורים.
הזוג $G = (V,E)$ נקרא **גרף מכוון**, אם E קבוצה של זוגות סדורים.
איברי הקבוצה V נקראים **קדקודים** או **צמתים**.
איברי הקבוצה E נקראים **צלעות** (בגרף לא מכוון) או **קשתות** (בגרף מכוון).
במקרה של גרף לא-מכוון נסמן צלע בין הקדקודים u,v על ידי $\{u,v\}$.
במקרה של גרף מכוון נסמן צלע מ- u ל- v על ידי (u,v).
נסמן לרוב את מספר הקדקודים על ידי n ואת מספר הצלעות על ידי m. לגרף עם n קדקודים נקרא לעתים **גרף מסדר n**.

רוב הגרפים שבהם נדון יהיו לא מכוונים. אם הגרף מכוון נאמר זאת במפורש. כאמור, נייצג לעתים את הגרף $G = (V,E)$ על ידי תרשים שבו לכל קדקוד $v\in V$ מתאימה נקודה. אם הגרף G לא-מכוון, נייצג צלע $\{u,v\}\in E$ על ידי קו בין u ל- v. אם הגרף G מכוון, נייצג צלע $(u,v)\in E$ על ידי חץ מכוון מ- u ל- v.

דוגמה 5.1.2: נתבונן בגרף הלא-מכוון בתרשים 5.1.1 מימין. קבוצת הקדקודים היא $V = \{a,b,c,d,e\}$ ואילו קבוצת הצלעות היא $E = \{\{a,b\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}\}$. בתרשים 5.1.1 משמאל ישנו גרף מכוון שבו קבוצת הקדקודים היא שוב $V = \{a,b,c,d,e\}$, וקבוצת הצלעות היא $E = \{(a,b), (a,d), (b,a), (c,b), (d,c), (d,e)\}$.





תרשים 5.1.1: מימין גרף לא-מכוון ומשמאל גרף מכוון

הערה: קבוצת הצלעות E בגרף מכוון היא יחס בינארי על קבוצת הקדקודים V. גרף לא-מכוון ניתן לראות גם כיחס בינארי סימטרי, שבו אם (a,b) ביחס אז גם (b,a) ביחס, ולכן במקום לצייר צלעות לשני הכיוונים, אנו משמיטים את כיווני הצלעות ומקבלים צלעות לא-מכוונות.

ישנן הרחבות למושג הגרף. כך למשל, **מולטי-גרף** הוא גרף לא מכוון שבו ייתכנו כמה צלעות בין זוגות קדקודים, וכן לולאות. **בפסאודו גרף** מתירים גם לולאות. **לולאה** היא צלע מהצורה $\{u,u\}$, כלומר צלע מקדקוד u לעצמו.

הגדרה 5.1.3: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. נאמר ששני קדקודים $u,v\in V$ **שכנים** (או **סמוכים**) אם קיימת צלע המחברת ביניהם, כלומר $\{u,v\}\in E$. במקרה זה נאמר גם שהצלע $\{u,v\}$ **חלה** בקדקודים u,v. אנו נסמן את קבוצת כל השכנים של קדקוד u על ידי $\Gamma(u)$, כלומר:

$$\Gamma(u) = \{v \mid \{u,v\} \in E\}.$$

כמו-כן, אם $S\subseteq V$ קבוצה של קדקודים, אז הקבוצה $\Gamma(S) = \{v \mid \exists\, u\in S,\ \{u,v\}\in E\}$ היא קבוצת כל השכנים של קדקודים ב- S.

בדומה, יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון. נאמר שקדקוד v **שכן** של קדקוד u אם קיימת צלע מכוונת מ- u אל v, כלומר $(u,v)\in E$. נאמר שהצלע (u,v) **חלה** בקדקוד u. בדומה אפשר להגדיר לכל קדקוד u את קבוצת השכנים שלו $\Gamma(u)$, ולכל קבוצה של קדקודים S את קבוצת השכנים שלה $\Gamma(S)$.

שימו לב, שיחס השכנות אינו בהכרח סימטרי בגרף מכוון. ייתכן בהחלט ש- $(u,v)\in E$ כלומר v שכן של u, אולם $(v,u)\notin E$ ולכן u אינו שכן של v. בגרף לא-מכוון יחס השכנות הוא כמובן סימטרי.

הגדרה 5.1.4: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. **הדרגה** של קדקוד $v\in V$ היא מספר הצלעות החלות ב- v, והיא תסומן על ידי $\mathrm{degree}(v)$.

יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון. **דרגת הכניסה** של $v \in V$ היא מספר הצלעות הנכנסות אל v. **דרגת היציאה** של קדקוד היא מספר הצלעות היוצאות מ- v. דרגת הכניסה של קדקוד v תסומן על ידי indegree(v) ואילו דרגת היציאה תסומן על ידי outdegree(v). **הדרגה** של קדקוד v מוגדרת על ידי $\text{degree}(v) = \text{indegree}(v) + \text{outdegree}(v)$.
אם $\text{degree}(v) = 0$ נאמר שהקדקוד v **מבודד**.

המשפט הפשוט הבא נקרא גם משפט "לחיצת הידיים". ניתן לפרשו בתור הטענה שאם קבוצה כלשהי של אנשים לוחצים ידיים (לאו דווקא כולם עם כולם), אז מספר הידיים הכולל שיילחצו הוא זוגי. הסיבה היא כמובן שבלחיצת ידיים מעורבות תמיד שתי ידיים.

משפט 5.1.5: בגרף לא-מכוון $G = (V,E)$ מתקיים $\sum_{v \in V} \text{degree}(v) = 2|E|$.

הוכחה: נספור לכל קדקוד v את מספר הצלעות החלות בו, כלומר נסכם את כל הדרגות. כל צלע $\{u,v\}$ תיספר פעמיים - עבור u ועבור v. ומכאן מתקבל השוויון. □

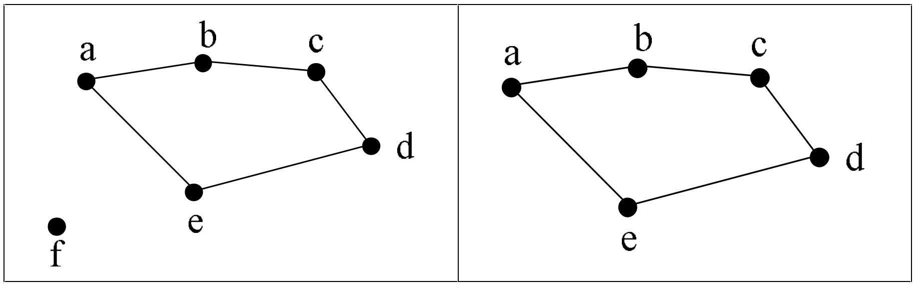
מסקנה 5.1.6: בגרף לא-מכוון $G = (V,E)$ יש מספר זוגי של קדקודים שדרגתם אי-זוגית.
הוכחה: לא ייתכן שבגרף לא-מכוון יש מספר אי-זוגי של קדקודים שדרגתם אי-זוגית, כי $\sum_{v \in V} \text{degree}(v) = 2|E|$, כלומר סכום הדרגות הוא מספר זוגי. □

התכונה הפשוטה ביותר לניסוח של גרפים היא הקשירות. באופן אינטואיטיבי גרף הוא קשיר "אם אפשר להגיע מכל קדקוד לכל קדקוד". לפני שנגדיר את מושג הקשירות פורמלית, נגדיר תחילה את המושגים הבאים:

הגדרה 5.1.7: יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. סדרה של קדקודים $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ כך ש- $\{v_i,v_{i+1}\} \in E$ לכל $i = 0,1,\dots p-1$, וכך שהצלעות $\{v_i,v_{i+1}\}$ כולן שונות זו מזו, נקראת **מסלול** (או **מסילה**). אם כל הקדקודים לאורך המסלול שונים זה מזה אז המסלול **פשוט**.
אם $v_0 = v_p$ אז המסלול נקרא **מעגל**. אם כל הקדקודים לאורך המעגל שונים זה מזה (פרט לקדקוד ההתחלה והסיום כמובן), אז זהו **מעגל פשוט**.
אורך המסלול $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ שווה ל- p, כלומר למספר הצלעות לאורכו.
יהיו $u,v \in V$ שני קדקודים. **המרחק** בין u ל- v מוגדר כאורך המזערי של מסלול ביניהם, ומסומן על ידי $d(u,v)$, או $d_G(u,v)$ כאשר רוצים להבהיר שהמרחק מחושב בגרף G. אם אין מסלול בין u ל- v אז מגדירים $d(u,v) = \infty$. **קוטר** הגרף הוא המרחק המקסימלי בגרף בין זוג קדקודים כלשהם. באופן דומה מגדירים מושגים אלה לגרפים מכוונים.

דוגמה 5.1.8: נתבונן בגרף שבתרשים 5.1.2 מימין. בין הקדקוד a לקדקוד d יש שני מסלולים שונים – המסלול (a,e,d) שאורכו 2 והמסלול (a,b,c,d) שאורכו 3. לכן המרחק בין a ל- d הוא 2. קוטר הגרף הוא 2.

נתבונן כעת בגרף שבתרשים 5.1.2 משמאל. מכיוון שאין מסלול בין הקדקוד a לקדקוד f, אז המרחק ביניהם הוא אינסוף. הקדקוד f הוא קדקוד מבודד, כי דרגתו שווה 0. קוטר הגרף הזה אף הוא אינסוף.



תרשים 5.1.2: קוטר הגרף מימין הוא 2, ומשמאל הקוטר הוא אינסוף.

טענה 5.1.9: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון, ויהיו $u,v,w\in V$. פונקצית המרחק בין קדקודים מקיימת:

1. $d(u,v) \geq 0$, ו- $d(u,v) = 0$ אם ורק אם $u = v$.
2. $d(u,v) = d(v,u)$.
3. $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$ (אי-שוויון המשולש).

פונקציה המקיימת את תנאים 1-3 נקראת **מטריקה**.

הוכחה: תכונות 1,2 ברורות מהגדרת אורכו של מסלול בין שני קדקודים. אי-שוויון המשולש נובע מכך שאם יש לנו מסלול מ- u ל- v ומסלול מ- v ל- w, הרי יש לנו מסלול מ- u ל- w שעובר דרך הקדקוד v. אולם ייתכן שהמסלול הקצר ביותר מ- u ל- w הוא מסלול אחר שאינו עובר דרך הקדקוד v. □

כעת אנו יכולים להגדיר במדויק את מושג הקשירות.

הגדרה 5.1.10: גרף לא-מכוון נקרא **קשיר** אם יש מסלול בין כל זוג קדקודים. גרף מכוון נקרא **קשיר חזק** אם לכל שני קדקודים $a,b\in V$ יש מסלול מ- a ל- b ומסלול מ- b ל- a.

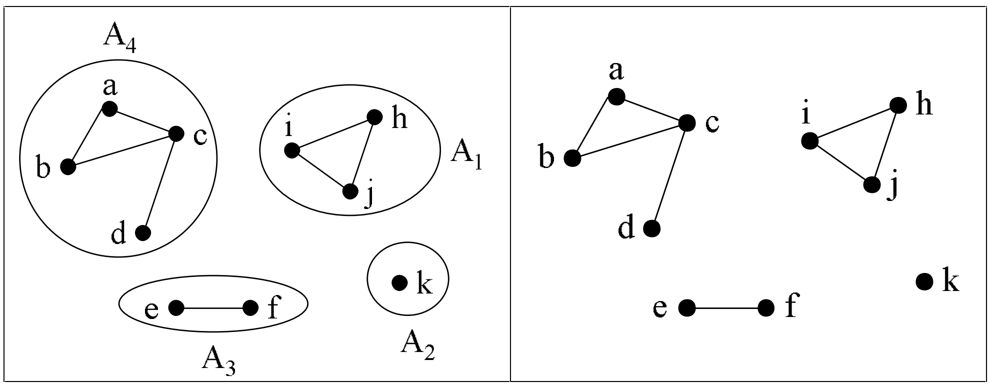
שימו לב שלדרישה החזקה יותר בגרף מכוון יש טעם. הרי, קיומו של מסלול מקדקוד a לקדקוד b אינו מבטיח קיומו של מסלול מ- b ל- a בגרף מכוון.

דוגמה 5.1.11: הגרף הלא-מכוון בתרשים 5.1.2 מימין הוא קשיר, ואילו הגרף הלא-מכוון באותו תרשים משמאל אינו קשיר. הגרף המכוון בתרשים 5.1.1 אינו קשיר חזק, כי למשל אין מסלול מקדקוד e לקדקוד d (וגם לא מ- e ליתר הקדקודים בגרף).

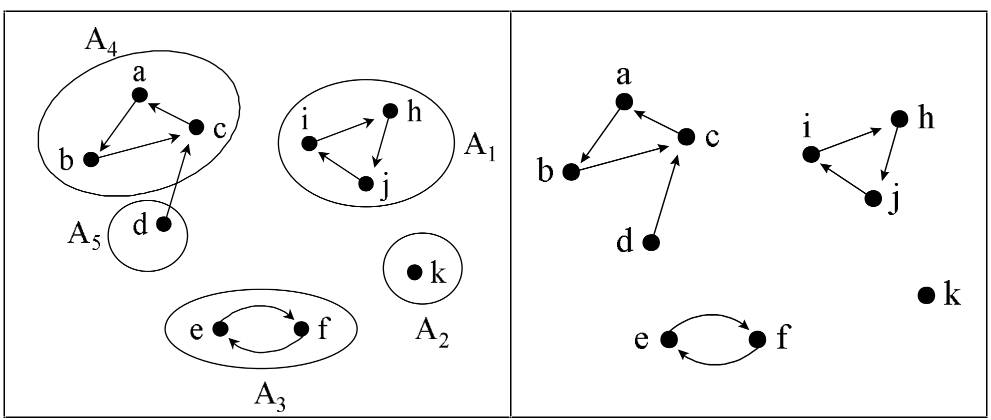
בעזרת מושג הקשירות אפשר לחלק את קדקודי הגרף הלא מכוון למחלקות שקילות של קדקודים הקשורים זה לזה על ידי מסלולים באופן הבא: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון, ונגדיר בו יחס שקילות ~ על קבוצת קדקודי הגרף V. נאמר שקדקוד u שקול לקדקוד v ביחס ~, כלומר $u \sim v$, אם יש מסלול מ- u ל- v בגרף. שימו לב שכל קדקוד שקול לעצמו ביחס הזה, כי יש מסלול

מאורך אפס מקדקוד לעצמו. קל לראות שזהו יחס שקילות (הוכיחו!), ולכן כפי שראינו בסעיף 1.3, הוא משרה חלוקה של קבוצת הקדקודים V למחלקות שקילות. מחלקות השקילות של היחס ~ נקראות **רכיבי הקשירות** של הגרף.
נסכם אם כן את הדיון האחרון. לכל גרף לא-מכוון G יש חלוקה $V = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ לקבוצות זרות, כך שאם הקדקודים $u,v \in A_i$ אז יש מסלול ביניהם, אבל אם $u \in A_i,\ v \notin A_i$ אז אין ביניהם מסלול.

בגרף מכוון הגדרת רכיבי הקשירות מסובכת יותר, שכן קיומו של מסלול מקדקוד u לקדקוד v אינו מבטיח את קיומו של מסלול מ- v ל- u. לכן, היחס ~ שהגדרנו למעלה אינו יחס שקילות במקרה של גרף מכוון (כי אינו סימטרי). אולם באופן לא פורמלי ההגדרה דומה. נאמר ששני קדקודים u,v נמצאים באותו **רכיב קשירות חזקה** של הגרף אם יש מסלול מ- u ל- v וגם מסלול מ- v ל- u.



תרשים 5.1.3: גרף לא-מכוון מימין ורכיבי הקשירות שלו משמאל.

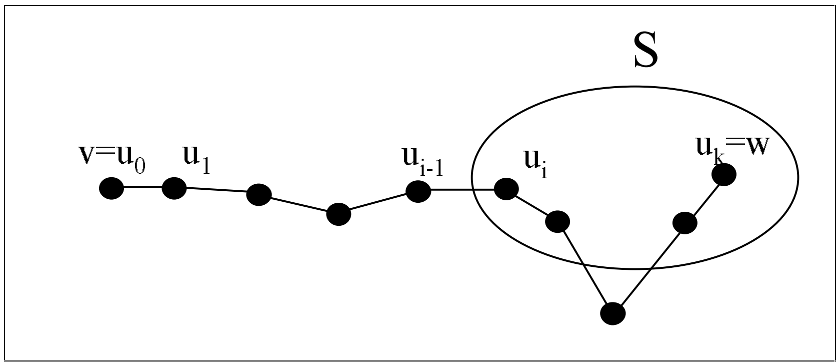


תרשים 5.1.3: גרף מכוון מימין ורכיבי הקשירות החזקה שלו משמאל.

הטענה הבאה פשוטה למדי, אולם שימושית בהוכחות רבות.

טענה 5.1.12: אם $G = (V,E)$ גרף לא מכוון קשיר ואם $S \neq \emptyset$ קבוצה חלקית ממש ל- V, אז יש קדקוד $u \notin S$ כך שיש ל- u שכן ב- S.

הוכחה: יהי $v \notin S$ קדקוד כלשהו (יש קדקוד כזה כי $S \neq V$). נבחר קדקוד $w \in S$ כלשהו. מכיוון שהגרף G קשיר, יש מסלול $P = (v = u_0, u_1, \ldots, u_k = w)$ בין v ל- w. הקדקוד הראשון לאורך המסלול P הוא v, והוא איננו שייך לקבוצה S. הקדקוד האחרון לאורך המסלול P הוא w, והוא שייך לקבוצה S. לכן, יש אינדקס ראשון $i > 1$ כך ש- $u_i \in S$. כלומר, $u_{i-1} \notin S$ ויש לו שכן u_i השייך ל- S. ולכן אפשר לבחור $u = u_{i-1}$. ראו תרשים 5.1.4. □

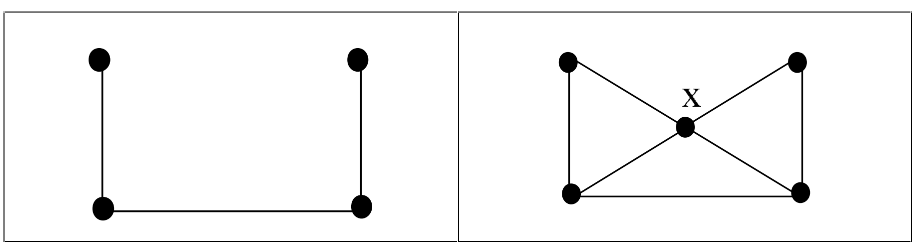


תרשים 5.1.4: הוכחת טענה 5.1.12.

לעתים נתבונן רק על חלקים מסוימים בגרף כלשהו. ההגדרה הבאה עוסקת בכך.

הגדרה 5.1.13: יהי $G = (V,E)$ גרף. אם $x \in V$ קדקוד כלשהו, אז הגרף $\mathbf{G \setminus \{x\}}$ הוא הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת הקדקוד x וכל הצלעות החלות בו. אם $S \subseteq V$ קבוצת קדקודים, אז הגרף $\mathbf{G \setminus S}$ הוא הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת כל הקדקודים ב- S והשמטת כל הצלעות החלות בהן. באותו אופן אם $e \in E$ צלע כלשהי, אז הגרף $\mathbf{G \setminus \{e\}}$ הוא הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת הצלע e.

נאמר שגרף $G' = (V',E')$ הוא **תת-גרף** של G אם $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, וכן לכל צלע $\{u,v\} \in E'$ מתקיים $u,v \in V'$. תת-גרף G' ייקרא **תת-גרף פורש** של G, אם $V' = V$.



תרשים 5.1.5: משמאל הגרף G, ומימין הגרף $G \setminus \{x\}$.

גם הטענה הבאה די אינטואיטיבית, אולם הוכחה פורמלית שלה כבר דורשת מאמץ מסוים.

טענה 5.1.14: בגרף קשיר לא מכוון עם n קדקודים יש לפחות $n-1$ צלעות.

הוכחה: יהי G גרף לא מכוון עם n קדקודים ו- m צלעות. נוכיח באינדוקציה על m שאם $m < n-1$ אז ב- G יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות. מכך ינבע שבגרף קשיר יש לפחות $n-1$ צלעות, כי אחרת אם $m \le n-2$ אז בגרף יש לפחות שני רכיבי קשירות, בסתירה לכך שהוא קשיר.

בסיס האינדוקציה: $m = 0$. ברור שבגרף עם n קדקודים וללא צלעות יש n רכיבי קשירות.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים עם $m-1 \ge 0$ צלעות ונוכיח לגרף עם $m > 0$ צלעות. יהי G גרף כזה, ותהי e צלע כלשהי ב- G. לפי הנחת האינדוקציה בגרף $G\setminus\{e\}$ יש לפחות $n-m+1$ רכיבי קשירות. נוסיף כעת את הצלע e בחזרה. ייתכנו שני מקרים:

א. אם הצלע e מחברת שני קדקודים השייכים לאותו רכיב קשירות בגרף $G\setminus\{e\}$ הרי שגם ב- G יש $n-m+1$ רכיבי קשירות.

ב. אם e מחברת שני קדקודים השייכים לשני רכיבי קשירות שונים בגרף $G\setminus\{e\}$, אז ב- G יש רכיב קשירות אחד פחות מאשר ב- $G\setminus\{e\}$, כלומר יש ב- G $n-m$ רכיבי קשירות (במקרה זה גורמת הוספת הצלע $e = \{u,v\}$ למיזוגם של שני רכיבי קשירות, זה של הקדקוד u וזה של הקדקוד v).

בכל מקרה הראינו שב- G יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות ובכך הושלמה ההוכחה. □

נוכיח כעת את שתי הטענות הפשוטות הבאות.

טענה 5.1.15: בגרף בעל $n \ge 3$ קדקודים ו- $m \ge n$ צלעות יש מעגל.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקדקודים n בגרף.

בסיס האינדוקציה: $n = 3$. הגרף היחיד עם $n = 3$ קדקודים ו- $m \ge 3$ צלעות הוא המשולש, וזהו כמובן מעגל.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים עם $n-1 \ge 3$ קדקודים ונוכיח לגרף G עם n קדקודים. ייתכנו שני מקרים:

א. אם יש ב- G קדקוד כלשהו x שדרגתו 1, אז נתבונן בגרף $G\setminus\{x\}$. בגרף הזה יש $n-1$ קדקודים ו- $m-1 \ge n-1$ צלעות, ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש בו מעגל. אולם המעגל הזה קיים כמובן גם בגרף G.

ב. אחרת, הדרגה של כל הקדקודים בגרף G היא לפחות 2. במקרה זה יהי v_0 קדקוד כלשהו ב- G. נצא מהקדקוד v_0 ונטייל על צלעות הגרף באופן כלשהו, כאשר אנחנו מקפידים שלא לסגת מיד אל הצלע שממנה באנו זה עתה. מכיוון שהדרגה של כל קדקוד היא לפחות 2, אז לא ניתקע באף קדקוד. מכיוון שהגרף סופי אנו נגיע בשלב כלשהו לקדקוד שכבר ביקרנו בו קודם לכן, ואז לפנינו מעגל כנדרש.

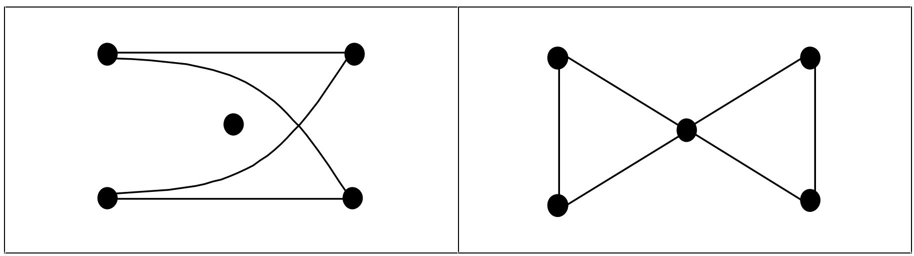
הראינו בכל מקרה שיש ב- G מעגל, ולכן הטענה נכונה. □

טענה 5.1.16: יהי $G = (V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון ותהי $e \in E$ צלע. אז הגרף $G\setminus\{e\}$ קשיר אם ורק אם הצלע e שייכת למעגל פשוט כלשהו ב- G.

הוכחה: עלינו להוכיח שני כיוונים. נניח תחילה כי $e = \{x,y\}$ והגרף $G\setminus\{e\}$ קשיר. לכן יש מסלול פשוט P מ- x ל- y בגרף $G\setminus\{e\}$. אם נוסיף את הצלע e למסלול P אז נקבל מעגל פשוט בגרף G הכולל את הצלע e.

ולהיפך, נניח כעת ש- C הוא מעגל פשוט בגרף G הכולל את הצלע e ונוכיח שהגרף $G\setminus\{e\}$ קשיר. בהינתן שני קדקודים כלשהם u,v בגרף $G\setminus\{e\}$, נרצה להוכיח שיש ביניהם מסלול כלשהו בגרף $G\setminus\{e\}$. מכיוון ש- G קשיר אז יש מסלול Q ב- G בין u ל- v. אם Q מסלול גם בגרף $G\setminus\{e\}$ אז סיימנו. אחרת, הצלע $e = \{x,y\}$ מופיעה במסלול Q, כלומר Q הוא מהצורה $Q = (u,\ldots,x,y,\ldots,v)$. נראה שגם במקרה זה אפשר להגיע מ- u ל- v בדרך עקיפה. יהי $C\setminus\{e\}$ המסלול המתקבל מהמעגל C לאחר השמטת הצלע e. נתבונן במסלול $Q' = \{u,\ldots,x,C\setminus\{e\},y,\ldots,v\}$, כלומר במקום ללכת ישירות מ- x ל- y, נלך דרך המסלול $C\setminus\{e\}$. המסלול Q' הוא מסלול ב- $G\setminus\{e\}$, ולכן גם במקרה זה ניתן להגיע מ- u ל- v כנדרש. □

הגדרה 5.1.17: יהי $G = (V,E)$ גרף. **הגרף המשלים** של G הוא הגרף $\overline{G} = (V,\overline{E})$, כאשר קבוצת הקדקודים של $\overline{G}$ זהה לזו של G, ואילו שני קדקודים u,v יהיו שכנים ב- $\overline{G}$ אם ורק אם אינם שכנים ב- G.

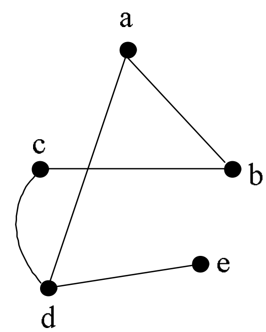


תרשים 5.1.6: גרף והמשלים שלו.

ייצוג גרף על ידי מטריצת שכנות

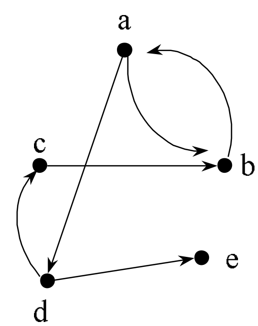
כזכור, בסעיף 1.3 ראינו כיצד לייצג יחס בינארי על ידי מטריצה או גרף. מכיוון שגרף הוא יחס בינארי, אפשר לתאר אותו בעזרת מטריצה במקום על ידי ציור. מטריצה זו נקראת **מטריצת השכנות** של הגרף כיוון שהיא מתארת את יחסי השכנות בין קדקודי הגרף. מספר השורות ומספר העמודות במטריצה הוא כמספר הקדקודים בגרף $G = (V,E)$. לצורך הדיון נניח כי $V = \{1,2,\ldots,n\}$. נרשום 1 במשבצת הנמצאת בשורה i ובעמודה ה- j אם יש צלע בין קדקוד i לקדקוד j. אחרת נרשום 0 במשבצת זו. שימו לב שאם G גרף לא-מכוון אז המטריצה סימטרית סביב האלכסון הראשי. כמו-כן האלכסון הראשי יהיה כולו אפסים כיוון שבגרף פשוט אין לולאות. ראו למשל תרשים 5.1.7 ותרשים 5.1.8.

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	1	0	1	0	0
c	0	1	0	1	0
d	1	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0



תרשים 5.1.7: גרף לא-מכוון ומטריצת השכנות שלו.

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	1	0	0	0	0
c	0	1	0	0	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	0	0	0



תרשים 5.1.8: גרף מכוון ומטריצת השכנות שלו.

תרגילים

1. מהו הקוטר המירבי של גרף קשיר עם n קדקודים?
2. מהו המספר המזערי של צלעות בגרף עם n קדקודים מקוטר 2?
3. הוכיחו שבגרף מכוון סכום דרגות היציאה של כל הקדקודים שווה לסכום דרגות הכניסה של כל הקדקודים. למה שווה סכום זה?
4. יהי G גרף לא מכוון שאיננו קשיר. הוכיחו כי הגרף המשלים $\overline{G}$ קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.
5. יהי G גרף לא מכוון עם n קדקודים שבו לכל קדקוד יש דרגה קטנה ממש מ- $\sqrt{n-1}$. הוכיחו שהקוטר של G הוא לפחות 3.

6. יהי G גרף לא מכוון עם n קדקודים שבו דרגת כל קדקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכיחו כי G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

7. יהי G גרף לא מכוון. הוכיחו שאם לכל קדקוד דרגה 2 לפחות, אז יש מעגל בגרף.

8. יהי G גרף לא מכוון ונתבונן ביחס השקילות $\sim$ שהוגדר בסעיף זה על קבוצת קדקודי הגרף, על ידי $u \sim v$, אם יש מסלול מ- u ל- v בגרף. הוכיחו שזה יחס שקילות.

9. הוכיחו שגרף לא-מכוון G קשיר אם ורק אם לכל זוג קדקודים u,v יש מסלול פשוט בין u ל- v.

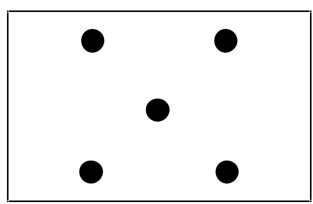
5.2. משפחות של גרפים

הנושאים שיוצגו: *הגרף הריק, הגרף השלם, קליקה, קבוצה בלתי-תלויה, מעגלים, מסלולים, קוביות, גרף רגולרי, גרף דו-צדדי, עצים ויערות, עלה בעץ, עץ פורש, עצים עם שורש, גרף מישורי, שילושים של המישור, הומיאומורף.*

בעולם הרחב של כל הגרפים ניתן להגדיר משפחות של גרפים בעלי תכונות משותפות. בסעיף זה נבחן כמה מהמשפחות המרכזיות של גרפים.

הגרף הריק והגרף השלם

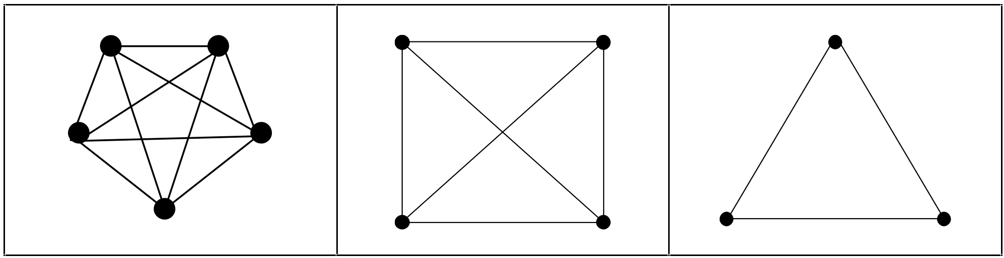
הגדרה 5.2.1: גרף ללא צלעות נקרא **הגרף הריק**. הגרף הריק על n קדקודים יסומן על ידי N_n.



תרשים 5.2.1: הגרף N_5.

הגדרה 5.2.2: גרף לא-מכוון שבו מופיעות כל הצלעות האפשריות נקרא **גרף שלם**. הגרף השלם על n קדקודים יסומן על ידי K_n. הגרף K_n נקרא גם **קליקה מסדר n** או **n-קליקה**.

שימו לב שהגרף השלם K_n הוא הגרף המשלים של הגרף הריק N_n.



תרשים 5.2.2: מימין K_3, במרכז K_4 ומשמאל K_5.

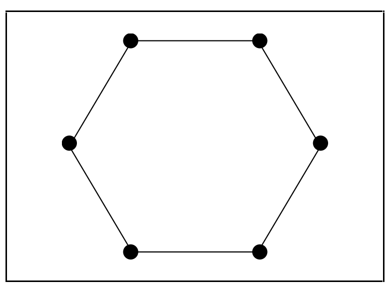
משפט 5.2.3: בגרף השלם הלא-מכוון K_n יש $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ צלעות.

הוכחה: מספר הזוגות הלא סדורים $\{x,y\}$ שאפשר לבחור מתוך קבוצה בת n איברים הוא $\binom{n}{2}$, ומספר זה שווה למספר הצלעות בגרף. □

הגדרה 5.2.4: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון, ותהי $S \subseteq V$. נאמר ש- S קבוצה **בלתי-תלויה** של קדקודים או **אנטי-קליקה** אם אין צלעות בין הקדקודים ב- S. כלומר, לכל $x,y \in S$ מתקיים $\{x,y\} \notin E$.

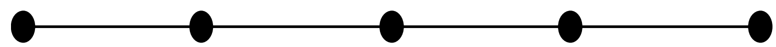
גרף המעגל וגרף המסלול

הגדרה 5.2.5: גרף בעל n קדקודים שנראה כמו מעגל, נקרא **גרף המעגל** (ולפעמים סתם מעגל), ויסומן על ידי C_n. פורמלית, קבוצת הקדקודים של הגרף היא $V = \{0,1,\ldots,n-1\}$ וקבוצת הצלעות היא $E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid i = 0,1,\ldots,n-1\}$.



תרשים 5.2.3: הגרף C_6.

הגדרה 5.2.6: גרף בעל n קדקודים שהוא מסלול פשוט נקרא **גרף המסלול** (או סתם מסלול), ויסומן על ידי P_n. פורמלית קבוצת הקדקודים היא $V = \{1,2,\ldots,n\}$ וקבוצת הצלעות היא $E = \{\{i,i+1\} \mid i = 1,2,\ldots,n-1\}$.

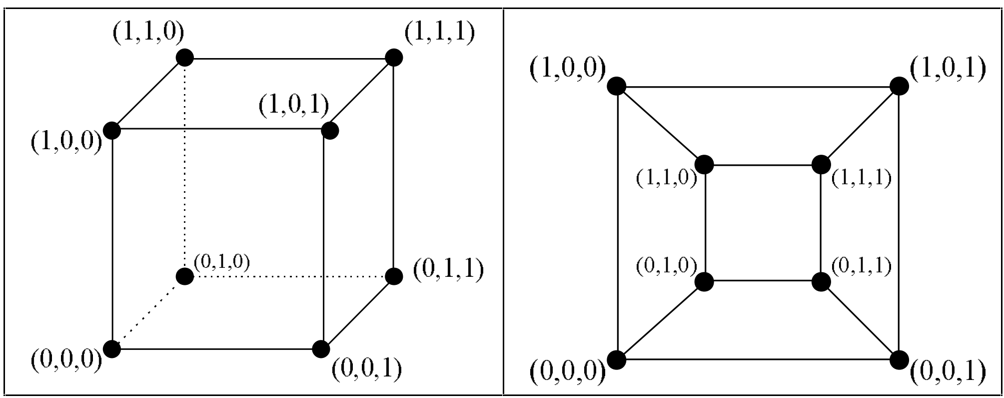


תרשים 5.2.4: הגרף P_5.

קוביות

הגדרה 5.2.7: נתבונן בגרף שקבוצת הקדקודים שלו היא אוסף כל הסדרות $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ כאשר $a_i \in \{0,1\}$, ויש צלע בין כל שתי סדרות השונות בדיוק בקואורדינטה אחת. הגרף הזה נקרא **גרף הקוביה ה- n ממדית**, והוא מסומן על ידי Q_n.

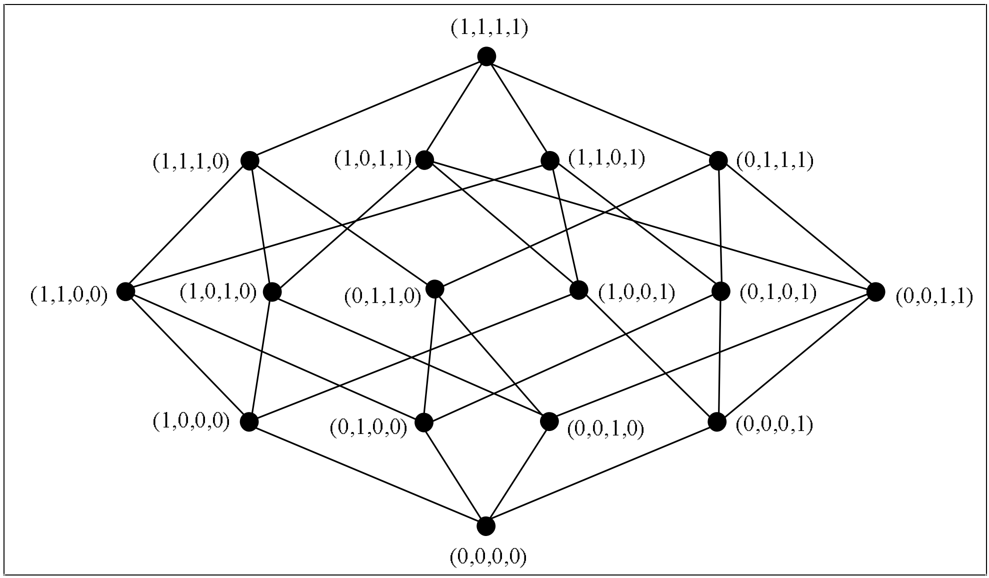
דוגמה 5.2.8: הגרף Q_3 הוא הקוביה התלת-ממדית הרגילה שאנו מכירים (ראו תרשים 5.2.5). ואילו בתרשים 5.2.6 אפשר לראות את הגרף Q_4, המוכר קצת פחות.



תרשים 5.2.5: שני שרטוטים של הגרף Q_3.

משפט 5.2.9: בגרף Q_n יש 2^n קדקודים ו- $n \cdot 2^{n-1}$ צלעות.

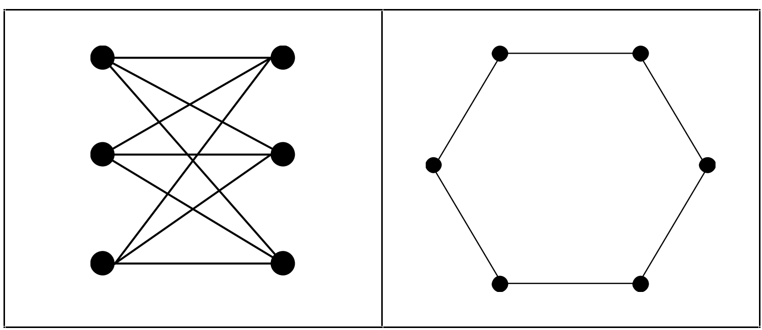
הוכחה: ברור שמספר הקדקודים הוא 2^n כי זהו מספר הסדרות באורך n של אפסים ואחדים. אשר למספר הצלעות - לכל קדקוד יש n שכנים, ולכן סכום הדרגות הוא $n \cdot 2^n$. כל צלע נספרה פעמיים (משפט 5.1.5), ולכן מספר הצלעות הוא $|E| = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$. □



תרשים 5.2.6: הגרף Q_4.

גרפים רגולריים

הגדרה 5.2.10: גרף לא-מכוון G נקרא **רגולרי** אם לכל הקדקודים בו יש אותה דרגה. אם לכל הקדקודים יש דרגה d אז הגרף נקרא גרף **d-רגולרי**.

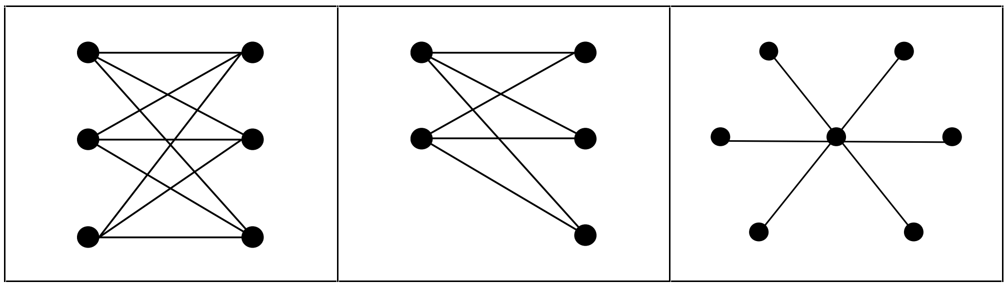


תרשים 5.2.7: C_6 הוא גרף 2-רגולרי, ו- $K_{3,3}$ הוא גרף 3-רגולרי.

דוגמה 5.2.11: הגרף הריק N_n הוא 0-רגולרי. הגרף K_n הוא גרף $(n-1)$ -רגולרי. הגרף C_n הוא גרף 2-רגולרי. הגרף Q_n הוא n-רגולרי.

גרף דו-צדדי

הגדרה 5.2.12: גרף $G = (V,E)$ ייקרא **דו-צדדי** אם ניתן לחלק את קבוצת קדקודי הגרף V לשתי קבוצות זרות V_1,V_2, כך שכל הצלעות בגרף הן בין קדקודים ב- V_1 ל- V_2. לפעמים נרצה להדגיש שלפנינו גרף דו-צדדי ונסמן אותו כ- $G = (V_1,V_2,E)$.
גרף דו-צדדי שלם הוא גרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$ שבו קיימות כל הצלעות האפשריות בין V_1 ל- V_2. אם $|V_1| = s$ ו- $|V_2| = t$, נסמן את הגרף הדו-צדדי השלם על ידי $K_{s,t}$.



תרשים 5.2.8: מימין $K_{1,6}$, באמצע $K_{2,3}$ ומשמאל $K_{3,3}$.

משפט 5.2.13: בגרף דו-צדדי שלם $K_{s,t}$ מספר הצלעות הוא $s\cdot t$.

משפט 5.2.14: בגרף דו-צדדי רגולרי $G = (V_1,V_2,E)$ מתקיים $|V_1| = |V_2|$.
הוכחה: נניח ש- G גרף d- רגולרי. לכן, $|E| = |V_1|\cdot d = |V_2|\cdot d$ ומכאן $|V_1| = |V_2|$. □

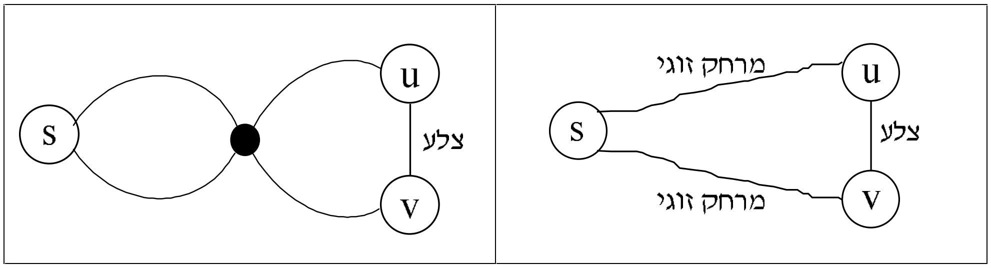
יש אפיון חשוב נוסף למשפחת הגרפים הדו-צדדיים כפי שמראה המשפט הבא.

משפט 5.2.15: גרף הוא דו-צדדי אם ורק אם כל המעגלים שלו (לאו דווקא הפשוטים) הם באורך זוגי.
הוכחה: יהי $G = (V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי. נתבונן על מעגל כלשהו בגרף. נצא מקדקוד $v_1\in V_1$ הנמצא במעגל הזה ונטייל לאורך המעגל. כל צלע שעליה אנחנו מטיילים מעבירה אותנו לצדו השני של הגרף. לכן, דרוש מספר זוגי של צלעות כדי לחזור לקדקוד v_1 שבו התחלנו ולסגור את המעגל.
ולהיפך, נניח שכל המעגלים בגרף $G = (V,E)$ הם באורך זוגי ונראה ש- G דו-צדדי. נניח ש- G קשיר. אחרת, נוכיח את הטענה לכל רכיב קשירות בנפרד.
יהי $s\in V$ קדקוד כלשהו בגרף G. נגדיר את V_1,V_2 באופן הבא:

$V_1 = \{u \in V \mid$ המרחק בין s ל- u זוגי$\}$, $V_2 = \{v\in V \mid$ המרחק בין s ל- v אי-זוגי$\}$.

(כזכור, המרחק של קדקוד v כלשהו מ- s הוא האורך המזערי של מסלול מ- s ל- v).
הקבוצות V_1, V_2 הן כמובן חלוקה של קבוצת הקדקודים V. נוכיח כעת שאכן הגרף $G = (V_1,V_2,E)$ דו-צדדי, כלומר אין צלעות ששני קדקודיהן ב- V_1 ואין צלעות ששני קדקודיהן ב- V_2.

נניח בשלילה שיש צלע $\{u,v\}$ בין קדקודים $u,v\in V_1$. לכן, המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v, המסלול הקצר ביותר מ- s ל- u והצלע $\{u,v\}$ יוצרים מעגל, לאו דווקא פשוט, שאורכו אי-זוגי (ראו תרשים 5.2.9) וזו סתירה. באותו אופן מראים שאין צלעות בין קדקודים ב- V_2. □



תרשים 5.2.9: מעגל אי-זוגי פשוט ולא פשוט.

למעשה אפשר להוכיח אף משפט חזק יותר, דהיינו שגרף הוא דו-צדדי אם ורק אם כל המעגלים הפשוטים שלו הם באורך זוגי. נכונות משפט זה מתבססת על הטענה הבאה.

טענה 5.2.16: אם לכל המעגלים הפשוטים ב- G אורך זוגי, אז גם לכל המעגלים הלא פשוטים אורך זוגי.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה ונביט במעגל C לא פשוט בעל אורך אי-זוגי מזערי. היות ש- C אינו פשוט יש קדקוד x ב- C שעוברים דרכו פעמיים. נניח שהמעגל C הוא:

$$C = (y_0,\ldots,y_r = x,\, y_{r+1},\ldots,y_s = x,\, y_{s+1},\ldots,y_t = y_0)$$

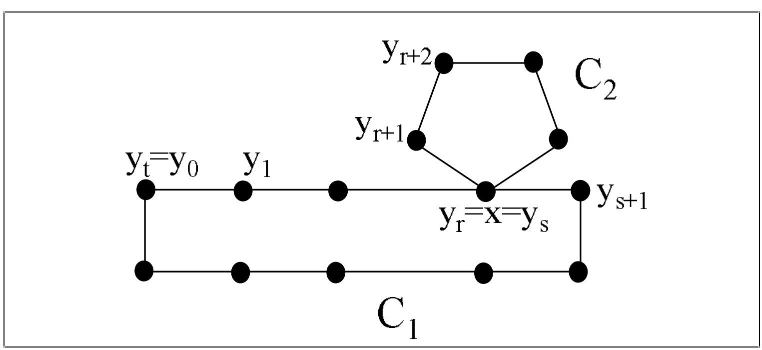
(היעזרו בתרשים 5.2.10). גם:

$$C_1 = (x = y_s,\, y_{s+1},\ldots,y_t = y_0,\, y_1,\ldots,y_r = x)$$

הוא מעגל ואורכו $c_1 = r{+}t{-}s$ וגם:

$$C_2 = (y_r = x,\, y_{r+1},\ldots,y_s = x)$$

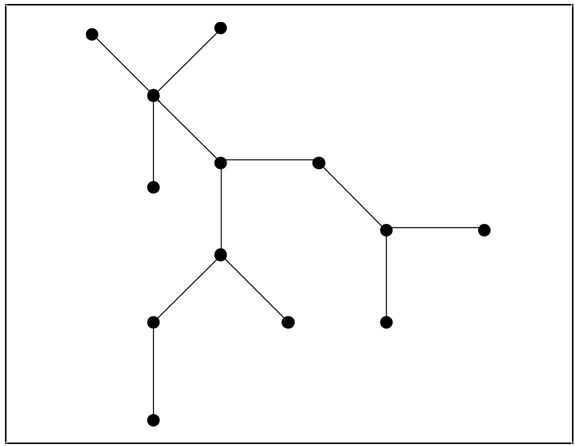
מעגל ואורכו $c_2 = s{-}r$. כמו-כן הסכום $c_1 + c_2 = (r{+}t{-}s) + (s{-}r) = t$ הוא אי-זוגי, כי t הוא אורכו של המעגל C. לכן אחד מבין c_1,c_2 אי-זוגי בניגוד למינימליות של t (C הוגדר כמעגל בעל אורך אי-זוגי מזערי). □



תרשים 5.2.10: המעגל C המורכב מהמעגלים C_1 ו- C_2 בהוכחת טענה 5.2.16.

עצים

הגדרה 5.2.17: גרף לא-מכוון שאיננו מכיל מעגלים נקרא **יער**. יער קשיר נקרא **עץ**. עץ הכולל n קדקודים יסומן (במידה שהדבר ברור מההקשר) על ידי T_n. קדקוד בעץ שדרגתו 1 נקרא **עלה**.



תרשים 5.2.11: גרף קשיר ללא מעגלים - עץ.

משפט 5.2.18: כל עץ עם $n \geq 2$ קדקודים מכיל עלה.
הוכחה: נצא מקדקוד כלשהו בעץ ונלך לאורך מסלול היוצא ממנו מבלי לסגת מיד אל הצלע האחרונה שממנה באנו. מספר הקדקודים בעץ סופי, ואיננו מבקרים בקדקוד פעמיים כי העץ חסר מעגלים. לכן, נגיע בהכרח לקדקוד שממנו איננו יכולים להתקדם יותר. דרגתו של קדקוד כזה היא 1. □

למעשה בכל עץ הכולל לפחות שני קדקודים, קיימים לפחות שני עלים (ראו תרגיל 1).

משפט 5.2.19: מספר הצלעות בעץ בעל n קדקודים הוא $m = n-1$.
הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה: $n = 1$, ואכן מספר הצלעות הוא $m = 0$.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לעצים עם $n-1$ קדקודים ונוכיח לעץ T_n עם n קדקודים.
T_n עץ ולכן יש בו לפי משפט 5.2.18, עלה x. נוריד את x ואת הצלע שחלה בו ונקבל עץ T_{n-1} (ראו תרגיל 6). על פי הנחת האינדוקציה מספר הצלעות בעץ T_{n-1} הוא $n-2$. נוסיף את הקדקוד x ואת הצלע שלו, ונקבל שב- T_n יש בסה"כ $n-1$ צלעות. □

תיאורים חלופיים למושג העץ ניתנים בטענות הבאות.

טענה 5.2.20: גרף G הוא עץ אם ורק אם :
1. G קשיר ומינימלי בתכונה זו, היינו השמטה של צלע כלשהי מ- G יוצרת גרף לא קשיר.
2. G אינו מכיל מעגלים ומקסימלי בתכונה זו, היינו הוספת צלע כלשהי ל- G יוצרת מעגל.

טענה 5.2.21: גרף קשיר עם n קדקודים ו- $(n-1)$ צלעות הוא עץ.

נזכיר גם שתת-גרף פורש של G הוא תת-גרף הכולל את כל הקדקודים של G. **עץ פורש** ב- G הוא תת-גרף פורש שהוא עץ.

משפט 5.2.22: גרף G הוא קשיר אם ורק אם יש ל- G עץ פורש.

הוכחה: ברור שאם ל- G יש עץ פורש אז G קשיר, כי עץ הוא קשיר והוספת צלעות אינה פוגעת בקשירות.

נוכיח כעת שאם G קשיר אז יש לו עץ פורש. נביט בתת-גרפים פורשים של G שהם קשירים (למשל G עצמו). מבין אלה נביט בתת-גרף הפורש H שיש לו מספר מזערי של צלעות. נוכיח ש- H עץ פורש של G.

יהי k מספר הצלעות של H. בהכרח $k \geq n-1$, אחרת H אינו קשיר (טענה **5.1.14**). אם $k = n-1$, אז בהכרח H עץ פורש (טענה 5.2.21). אם $k \geq n$, אז H מכיל מעגל (טענה **5.1.15**) לכן, יש צלע e במעגל הזה ב- H שאפשר להשמיט, וגם התת-גרף $H\backslash\{e\}$ קשיר (טענה **5.1.16**). אולם זו סתירה למינימליות של H שהוגדר כתת-גרף הפורש עם המספר המזערי של צלעות. □

הגדרה 5.2.23: עץ עם שורש או **עץ שתול** הוא עץ שבו יש קדקוד אחד מיוחד הנקרא **שורש** העץ. נתבונן על מסלול מהשורש לקדקוד כלשהו u בעץ. כל קדקוד לאורכו של המסלול הזה נקרא **אב קדמון** של u, ואילו u הוא **צאצא** של כל אחד מן הקדקודים לאורך המסלול. הקדקוד שנמצא מיד לפני u על המסלול הוא **ההורה** של u, ואילו u **הילד** שלו. השורש הוא הקדקוד היחיד ללא הורה. קדקוד ללא ילדים נקרא **עלה**. כל קדקוד אחר נקרא **קדקוד פנימי**. **גובה העץ** הוא אורכו של המסלול הארוך ביותר מהשורש לעלה כלשהו בעץ. **העומק** של קדקוד הוא אורכו של המסלול מהשורש אליו. **הדרגה** של קדקוד היא מספר הילדים של הקדקוד.

הערה: יש להעיר שהגדרה זו של דרגה בעץ עם שורש אינה מתיישבת עם ההגדרה הרגילה לדרגה, אך לא נחרוג מהמקובל. לחילופין ניתן לחשוב על עץ עם שורש כעל גרף מכוון שבו כל הצלעות מכוונות מן השורש החוצה, ואז הדרגה בעץ היא פשוט דרגת היציאה בגרף המכוון.

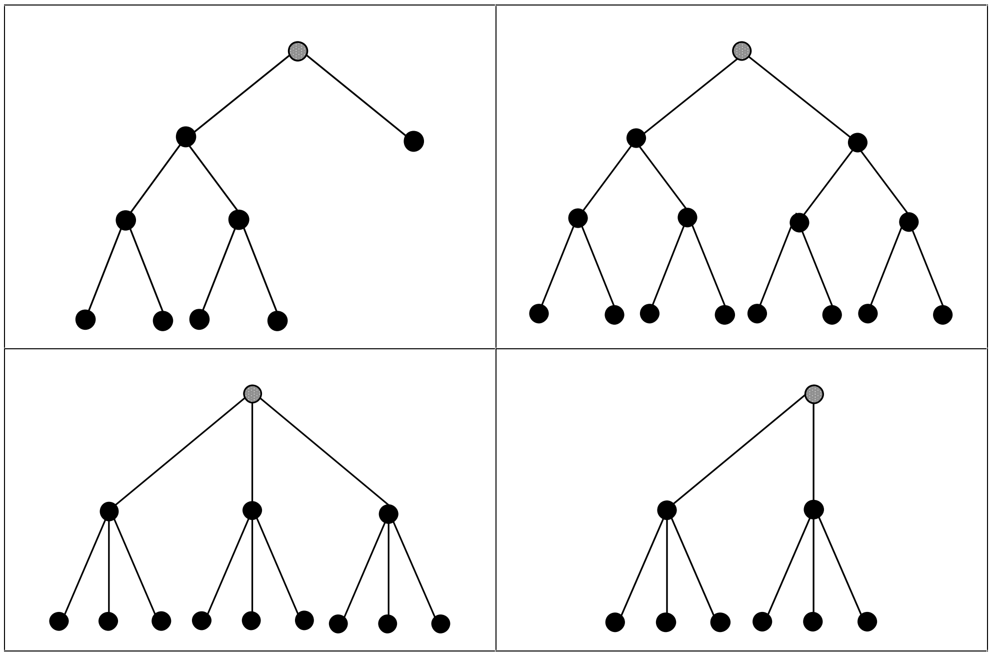
בהקשר זה כדאי להעיר על מנהגם המשונה של קומבינטורים ומדעני מחשב לצייר את עציהם כשהשורש למעלה והעלים למטה. העובדה המוזרה הזו מזכירה את הקטע הבא משירו של ע. הלל "שיחה עם עטלף":

- איפה הראש?
- למטה.
- ואיפה הרגליים?
- למעלה!
- ומה שלומך בדרך כלל?
- טרללה!

(ע.הלל – שיחה עם עטלף).

ישנם סוגים מיוחדים של עצים עם שורש. כך למשל:

- **עץ בינארי:** הדרגה של כל קדקוד היא לכל היותר 2.
- **עץ בינארי מלא:** כל קדקוד הוא עלה או שדרגתו 2 בדיוק.
- **עץ בינארי שלם:** כל העלים באותו העומק ולכל הקדקודים הפנימיים דרגה 2.
- **עץ k-י מלא**: כל קדקוד הוא עלה או שדרגתו k בדיוק.
- **עץ k-י שלם:** כל העלים באותו העומק ולכל הקדקודים הפנימיים דרגה k.



תרשים 5.2.12: דוגמאות של עצים עם שורש, השורש באפור.
למעלה מימין – עץ בינארי שלם מגובה 3. למעלה משמאל – עץ בינארי מלא מגובה 3.
למטה מימין – עץ k-י כאשר $k = 3$, למטה משמאל – עץ k-י שלם כאשר $k = 3$.

טענה 5.2.24: מספר הקדקודים הפנימיים בעץ k-י שלם מגובה h הוא $\frac{k^h-1}{k-1}$, מספר העלים הוא k^h, ומספר הקדקודים הכולל הוא $\frac{k^{h+1}-1}{k-1}$.

הוכחה: לשורש יש k ילדים בעומק 1. לכל אחד מהם יש k ילדים בעומק 2, וכך הלאה. לכן, מספר העלים בעומק h הוא k^h. מספר הקדקודים הפנימיים יהיה:

$$1+k+k^2+\ldots+k^{h-1}=\sum_{i=0}^{h-1}k^i=\frac{k^h-1}{k-1}.$$

שימו לב, איננו סופרים את העלים בביטוי הנ"ל, כי עלה איננו קדקוד פנימי. □

את הטענה האחרונה אפשר להוכיח גם באינדוקציה על גובה העץ (נסו). אם מדובר בעץ בינארי שלם מתקבלת המסקנה הפשוטה הבאה.

מסקנה 5.2.25: בעץ בינארי שלם מגובה h יש 2^h-1 קדקודים פנימיים, 2^h עלים, ובסה"כ $2^{h+1}-1$ קדקודים.

מסקנה 5.2.26: הגובה של עץ בינארי שלם בעל n קדקודים הוא $\log_2(n+1)-1$.
הוכחה: יהי h גובה העץ. לפי המסקנה האחרונה מספר הקדקודים הכולל בעץ בינארי שלם הוא $n = 2^{h+1}-1$. לכן, $h+1 = \log_2(n+1)$. □

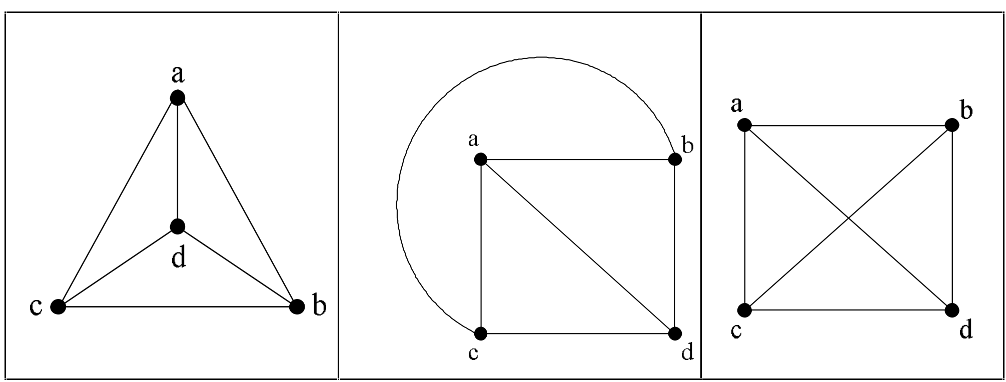
בדומה אפשר לחשב את הגובה של עץ k-י שלם כפונקציה של מספר הקדקודים בעץ. יתקבל ביטוי דומה, אולם בסיס הלוגריתם יהיה k.

גרפים מישוריים

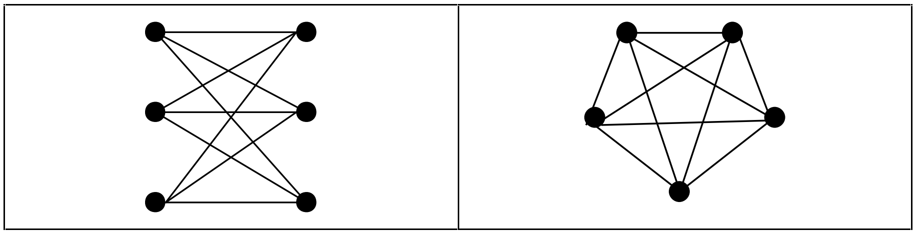
הגדרה 5.2.27: גרף G נקרא **מישורי** אם ניתן לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות תיחתכנה.

בייצוג מישורי כל קדקוד של הגרף מתאים לנקודה במישור וכל צלע למסילה מישורית פשוטה. צריך להעיר שהגדרה מדויקת של המושג גרף מישורי מחייבת ידע מסוים בטופולוגיה. עובדות רבות שהן אינטואיטיביות מאוד מוכחות בטופולוגיה, ופעמים רבות הוכחתן אינה קלה כלל וכלל. למשל משפט ז'ורדן אומר שכל עקום מישורי פשוט (שאינו חותך את עצמו) מפריד את המישור ל"פנים" ו"חוץ". אפילו ההגדרה המדויקת של מושגים אלה אינה מיידית. אנו נימנע מדיון בנקודות עדינות אלה.

בתרשים 5.2.13 אפשר לראות שלושה תיאוריים גרפיים של הגרף K_4, מהם שניים מישוריים. שימו לב ש- K_4 מישורי מכיוון **שיש** לו ייצוג נאות במישור. מאידך, לא כל גרף ניתן לשיכון במישור, כפי שנוכיח בהמשך. בתרשים 5.2.14 מצוירים שני גרפים לא מישוריים.

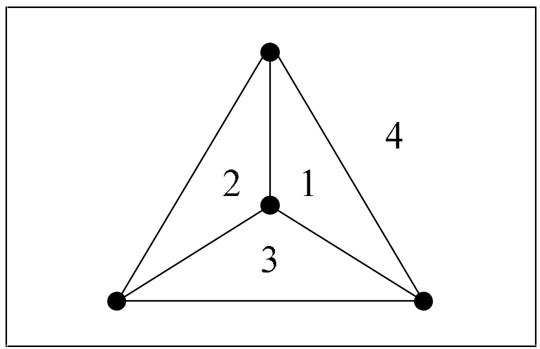


תרשים 5.2.13: שלושה תיאורים גרפיים של K_4, מהם שניים מישוריים.



תרשים 5.2.14: הגרפים K_5 ו- $K_{3,3}$ אינם מישוריים.

הגדרה 5.2.28: נתבונן בהצגה מישורית של גרף מישורי G. כל אזור החסום על ידי צלעות הגרף נקרא **פאה**. האזור שאינו חסום על ידי צלעות הגרף נקרא **הפאה החיצונית** או **הפאה האינסופית** של הגרף.



תרשים 5.2.15: ארבע הפאות של הגרף ממוספרות. הפאה החיצונית ממוספרת ב- 4.

אוילר הוכיח את הקשר הבא בין מספר הקדקודים, הצלעות והפאות של כל גרף מישורי.

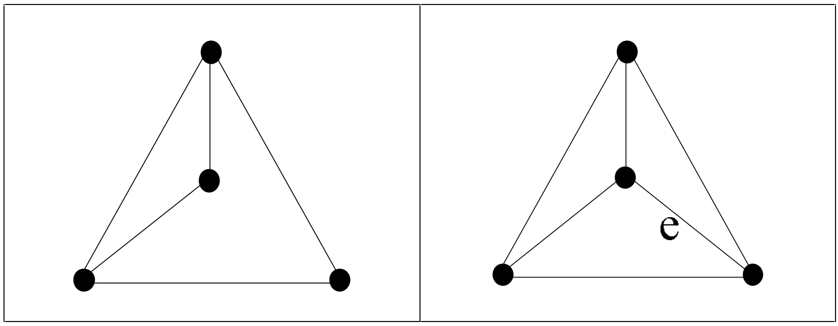
משפט 5.2.29 (נוסחת אוילר): יהי G גרף מישורי קשיר. אז $n + f - m = 2$, כאשר n מספר הקדקודים, m מספר הצלעות ו- f מספר הפאות של הגרף G.

הוכחה: נקבע את מספר הקדקודים n, ונוכיח את המשפט באינדוקציה על מספר הצלעות m של הגרף. מכיוון ש- G קשיר בהכרח $m \geq n-1$ (טענה **5.1.14**).

בסיס האינדוקציה: $m = n-1$. במקרה זה G הוא עץ (טענה **5.2.21**). הפאה היחידה היא הפאה האינסופית, כלומר $f = 1$. מכיוון ש- $m = n-1$ נוסחת אוילר מתקיימת.

שלב האינדוקציה: נוכיח לגרף קשיר עם $m \geq n$ צלעות. לפי טענות **5.1.15** ו- **5.1.16**, יש ב- G צלע e השייכת למעגל שהשמטתה אינה מנתקת את הגרף. לכן, בגרף $G' = G\backslash\{e\}$ יש $n' = n$ קדקודים ו- $m' = m-1$ צלעות והוא קשיר. מכאן, על פי הנחת האינדוקציה לגבי G' מתקיים $n' - m' + f' = 2$, כאשר n', m', f' הם מספר הקדקודים, הצלעות והפאות של G' בהתאמה. נשים לב כי השמטת הצלע e גורמת למיזוג של שתי הפאות שבהן היא גובלת (תרשים **5.2.16**). לכן,

מספר הפאות f' בגרף G' קטן ב- 1 ממספר הפאות ב- G, כלומר $f'=f-1$. יוצא אם כך:
$n-m+f=n-(m-1)+(f-1)=n'-m'+f'=2$. □



תרשים 5.2.16: שתי פאות מתאחדות כתוצאה מהשמטת הצלע e.

הדעת נותנת שאם יש בגרף מספר גבוה מאוד של צלעות הוא איננו יכול להיות מישורי. מעניין לכן לשאול מהו המספר המירבי של צלעות בגרף מישורי בעל **n** קדקודים. בכך עוסק המשפט הבא.

משפט 5.2.30: יהי G גרף מישורי קשיר עם $3 \le n$ קדקודים ו- m צלעות. אז $m \le 3(n-2)$.
הוכחה: יהי t_F מספר הצלעות החלות בפאה F. כל פאה מכילה לפחות שלוש צלעות ולכן $t_F \ge 3$ לכל פאה F. מאידך, $2m \ge \sum_F t_F$ מפני שכל צלע משותפת לכל היותר לשתי פאות ולכן נמנית לכל היותר פעמיים בסכום הזה (הסבירו מדוע לא בהכרח **בדיוק** פעמיים. ראו תרגיל 7). לכן $2m \ge \sum_F t_F \ge 3f$. כלומר $f \le \frac{2}{3}m$, כאשר f מספר הפאות של G. נשתמש כעת בנוסחת אוילר ונקבל:

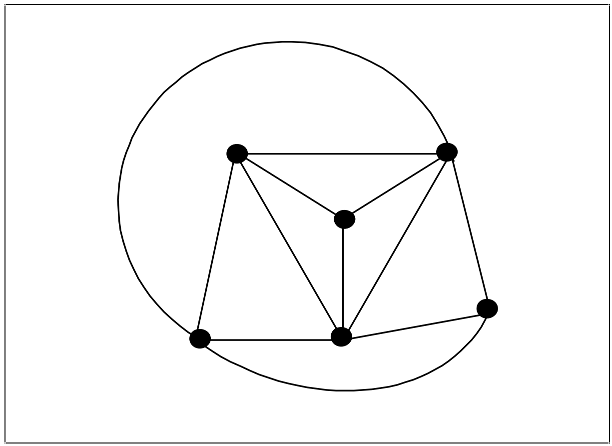
$$2 = n - m + f \le n - m + \frac{2}{3}m$$

ולכן $m \le 3(n-2)$ כנדרש. □

הערה: לא קשה להראות שהחסם האחרון הדוק. בגרף מישורי שבו מתקיים שוויון בהכרח כל הפאות הן משולשים (מדוע?). גרפים כאלה קיימים וקל ליצור אותם. הם נקראים **שילושים של המישור** (טריאנגולציות של המישור). ראו למשל תרשים 5.2.17.

כעת אנחנו יכולים להוכיח כי גרפים מסוימים אינם מישוריים.

מסקנה 5.2.31: הגרף K_5 אינו מישורי.
הוכחה: מספר הקדקודים של הגרף K_5 הוא $n = 5$ ומספר הצלעות הוא $m = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. לו היה K_5 מישורי היינו מקבלים ממשפט 5.2.30 ש- $10 \le 3(5-2) = 9$ וזו סתירה. □



תרשים 5.2.17: דוגמה לשילוש של המישור עם $n = 6$ קדקודים.

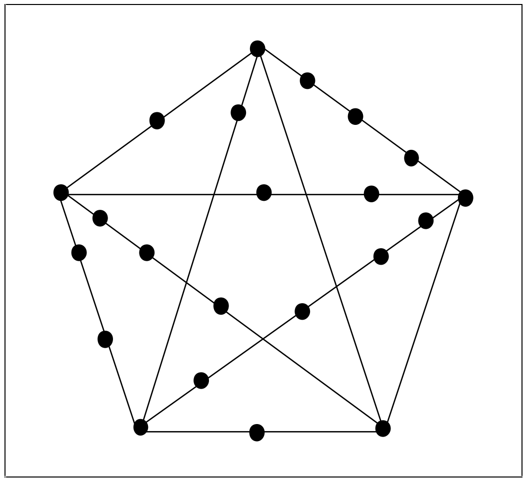
מסקנה 5.2.32: הגרף $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הוכחה: הטיפול בגרף $K_{3,3}$ קצת יותר מורכב. נניח בשלילה ש- $K_{3,3}$ מישורי. כאן $n = 6,\ m = 9$ ולכן לפי נוסחת אוילר $f = 5$. נחזור לאי-שוויון $\sum_F t_F \le 2m = 18$, כאשר t_F הוא מספר הצלעות החלות בפאה F. בסכום $\sum_F t_F$ אנו מסכמים במקרה זה חמישה מספרים טבעיים, ולכן ערכם הממוצע הוא לכל היותר $\frac{1}{5}\sum_F t_F \le \frac{18}{5} = 3.6$. לכן, חייבת להיות פאה F שמספר צלעותיה אינו עולה על הממוצע, כלומר יש בה לכל היותר $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ צלעות. ואולם בגרף $K_{3,3}$ אין משולשים (הוא גרף דו-צדדי ולכל מעגליו אורך זוגי, משפט 5.2.15). □

משפט חשוב של קורטובסקי Kuratowski אומר שבמובן מסוים הגרפים $K_5, K_{3,3}$ "אחראיים" תמיד לאי מישוריות של גרפים. גרף המתקבל מהחלפה של כל צלע ב- K_5 במסלול כלשהו כאשר המסלולים זרים, נקרא **הומיאומורף** של K_5 (בדומה אפשר להגדיר גם הומיאומורף של $K_{3,3}$). ראו לדוגמה תרשים 5.2.18.

קל לראות שכל גרף שהוא הומיאומורף של K_5 או של $K_{3,3}$ אף הוא אינו מישורי. אך גם ההיפך נכון (וקשה להוכחה!). אנו מביאים את המשפט הבא ללא הוכחה.

משפט 5.2.33 (Kuratowski): הגרף G אינו מישורי אם ורק אם הוא מכיל תת-גרף שהוא הומיאומורף של K_5 או תת-גרף שהוא הומיאומורף של $K_{3,3}$.



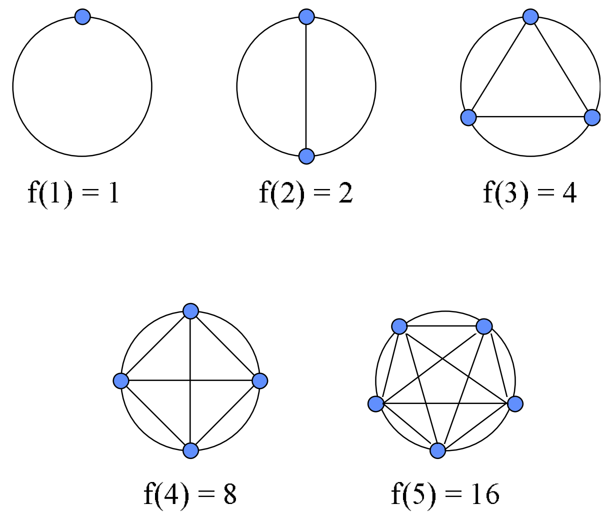
תרשים 5.2.18: הומיאומורף של K_5.

המשפט הבא יהיה חיוני לנו בסעיף 5.5 שבו נדון בצביעה של גרפים מישוריים.

משפט 5.2.34: בכל גרף מישורי $G = (V,E)$ קיים קדקוד שדרגתו לכל היותר 5.
הוכחה: נראה כי הדרגה הממוצעת של קדקודי G קטנה ממש מ- 6, ולכן חייב להיות לפחות קדקוד אחד שדרגתו אינה עולה על הממוצע, ולכן קטנה מ- 6. ואכן, הדרגה הממוצעת של קדקודי הגרף היא $\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\text{degree}(v)$. אולם לפי משפט 5.1.5, סכום דרגות כל הקדקודים שווה ל-$2|E|$. כמו-כן לפי משפט 5.2.30, $|E| \le 3(|V|-2)$. משילוב כל העובדות האלה נקבל:

$$\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\text{degree}(v) = \frac{1}{|V|}\cdot 2\cdot|E| \le \frac{1}{|V|}\cdot 2\cdot 3(|V|-2) = 6\frac{|V|-2}{|V|} < 6 \quad . \quad \square$$

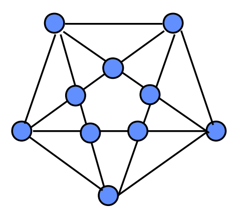
נסיים סעיף זה בדוגמה הבאה מתחום הגיאומטריה. נשים n נקודות במרחקים שווים על שפתו של מעגל, ונחבר כל זוג נקודות על ידי קו, כפי שאפשר לראות בתרשים 5.2.19. השאלה היא כמה אזורים נוצרו בתוך המעגל. נסמן מספר זה ב- $f(n)$. כעת בידינו כלים לפתור בעיה זו. אנו נפתור את הבעיה רק עבור n אי-זוגי.



תרשים 5.2.19: דוגמאות לפיזור n נקודות במרחקים שווים על המעגל.

משפט 5.2.35: $f(n)=1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$ לכל n אי-זוגי.

הוכחה: כאשר n אי-זוגי לא ייתכן מצב שבו נחתכים יותר משני אלכסונים בנקודה. נתעלם לרגע מהמעגל ונתרכז רק במצולע המוגדר על ידי n הנקודות שעל שפת המעגל. אנו נתייחס לכל נקודת חיתוך של שני אלכסונים כאל קדקוד כפי שאפשר לראות בתרשים הבא, עבור המקרה של $n = 5$.



הגרף המתקבל באופן זה הוא מישורי, ולכן מקיים את נוסחת אוילר, כלומר מתקיים $v + f - e = 2$, כאשר v מספר הקדקודים, e מספר הצלעות ו- f מספר הפאות של הגרף. נמצא תחילה את מספר הקדקודים של הגרף. לגרף שהתקבל יש n קדקודים על שפת המעגל ובנוסף אותם קדקודים שהתקבלו מחיתוך של שני אלכסונים. מכיוון שכל זוג אלכסונים נחתך, אז כל 4 נקודות על שפת המעגל הנמצאות בקצוות של שני אלכסונים - מגדירות נקודת חיתוך. מספר הדרכים לבחור 4 נקודות מתוך n הוא כמובן $\binom{n}{4}$. לכן בסה״כ קיבלנו כי $v = n+\binom{n}{4}$.

נעבור כעת למנות את מספר הצלעות של גרף זה. לפי משפט 5.1.5 מספר הצלעות מקיים את הנוסחה הפשוטה $\sum_{v\in V}\text{degree}(v) = 2e$. לכן, $e=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\text{degree}(v)$. נמצא אם כן את סכום

הדרגות של קדקודי הגרף. הדרגה של כל אחד מהקדקודים הנמצאים על שפת המעגל היא $n-1$. מכיוון שיש n קדקודים כאלה, הם תורמים $n(n-1)$ לסכום הדרגות. מה לגבי דרגת הקדקודים האחרים? זה פשוט - דרגתם 4. ומכיוון שראינו שמספרם $\binom{n}{4}$, הרי תרומתם לסכום הדרגות הוא $4\cdot\binom{n}{4}$. בסה"כ קיבלנו כי:

$$e=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\text{degree}(v)=\frac{1}{2}\left(n(n-1)+4\cdot\binom{n}{4}\right)=\frac{n(n-1)}{2}+2\cdot\binom{n}{4}=\binom{n}{2}+2\cdot\binom{n}{4}.$$

נשתמש כעת בנוסחת אוילר ונקבל כי:

$$f=2-v+e=2-n-\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+2\cdot\binom{n}{4}=2+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-n.$$

נוסיף לכך את n האזורים הקרובים לשפת המעגל ונחסיר את הפאה האינסופית של המצולע, ונקבל:

$$2+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-n+n-1=1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$$

אזורים כנדרש. □

תרגילים

1. הוכיחו שבכל עץ בעל $n \geq 2$ קדקודים יש לפחות שני עלים.

2. כיצד נראה הגרף המשלים של הגרף הדו-צדדי השלם $K_{s,t}$?

3. גרף פטרסן Petersen הוא גרף לא-מכוון המוגדר כך: תהי $X = \{0,1,2,3,4\}$ קבוצה. לכל זוג איברים מ- X מתאים קדקוד בגרף. נחבר שני קדקודים u,v על ידי צלע אם הם מתאימים לזוגות זרים של איברי X. כך למשל, הקדקודים המייצגים את הזוגות $\{1,2\}$ ו- $\{3,4\}$ יחוברו על ידי צלע, ואילו הקדקודים $\{1,2\}$ ו- $\{2,3\}$ לא יחוברו על ידי צלע.
   א. ציירו את הגרף המתקבל.
   ב. מה מספר הקדקודים והצלעות של הגרף? מה דרגת הקדקודים? חשבו מספרים אלה בלי לספור אותם בציור, אלא מתוך הגדרת הגרף.
   ג. מהו קוטר הגרף?
   ד. הוכיחו שגרף פטרסן אינו מישורי.
   ה. אמתו את משפט קורטובסקי (משפט 5.2.33) לגרף פטרסן: האם תוכלו למצוא בו הומיאומורף של K_5 או של $K_{3,3}$?

4. יהי T עץ. נבנה גרף חדש על ידי הוספת קדקוד נוסף x וחיבור x לקדקוד אחד בדיוק ב- T. הוכיחו שהגרף החדש אף הוא עץ. הוכיחו שכל עץ מתקבל באופן זה, כלומר על ידי הוספת קדקוד אחר קדקוד, וחיבור כל קדקוד כזה לקדקוד כלשהו שכבר קיים.

5. נגדיר באופן רקורסיבי מחלקה F של גרפים:
בסיס: הגרף הכולל קדקוד בודד שייך למחלקה F.
כלל רקורסיבי: יהיו G גרף ב- F, x קדקוד ב- G ו- y קדקוד חדש שאיננו שייך ל- G. נבנה גרף חדש על ידי הוספת הקדקוד y והצלע {x,y} ל- G. אז גם הגרף החדש שייך למחלקה F.
מהי המחלקה F? הוכיחו תשובתכם.

6. יהי T עץ ו- x עלה. הוכיחו שגם $T \setminus \{x\}$ הוא עץ.

7. בהוכחת משפט 5.2.30 טענו שכל צלע נמנית לכל היותר פעמיים בסכום $\sum_F t_F$, כאשר t_F הוא מספר הצלעות החלות בפאה F, ושאלנו מדוע לא בהכרח בדיוק פעמיים. מיהן הצלעות הנמנות רק פעם אחת? רמז: הביטו במקרה של עץ.

8. יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. הוכיחו שאם לכל צלע $e \in E$ הגרף $G \setminus \{e\}$ הוא עץ, אז G הוא מעגל.

9. יהי $n \geq 4$ מספר זוגי. הראו איך לבנות עץ עם n קדקודים שבו לכל קדקוד שאינו עלה יש דרגה 3 בדיוק. מהו מספר העלים בעץ כזה כפונקציה של n? הסבירו מדוע n חייב להיות זוגי.
הערה: לא מדובר כאן בעץ עם שורש.

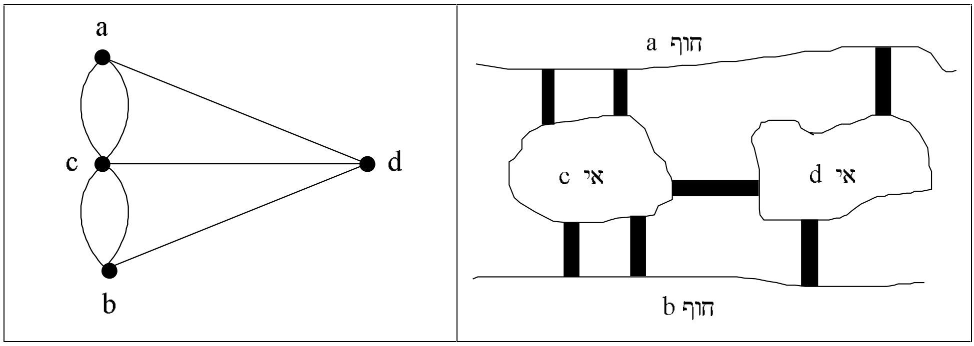
10. בנו גרף לא מכוון שבו כל הדרגות גדולות מ- 10 ויש בו קדקוד שאינו נמצא על אף מעגל.

5.3. מסלולים בגרפים

הנושאים שיוצגו: *מעגל אוילר, מסלול אוילר, רדוקציה, סדרת דה-ברויין, מעגל המילטון, מסלול המילטון, כיסוי לוח שח על ידי פרש, צופן גריי, בעיית הסוכן הנוסע, גרף תחרות.*

מעגל אוילר

העיר קניגסברג Königsberg שוכנת על שתי גדותיו של הנהר פרגל Pregel ועל שני איים הנמצאים באמצעו של הנהר. האיים מחוברים אל החוף וביניהם על ידי שבעה גשרים כפי שניתן לראות בתרשים 5.3.1 מימין. תושבי העיר נהגו לטייל לאורך הגשרים וכמה תושבים סקרנים שאלו את עצמם האם יכול אדם לצאת מביתו, לעבור על כל גשר בדיוק פעם אחת ולחזור בסיום לביתו.
המתמטיקאי לאונרד אוילר הנחשב לאבי תורת הגרפים, הכריע בסוגיה זו, והוכיח שהדבר אינו אפשרי. כדי לעשות זאת הוא ייצג את חלקי העיר השונים והגשרים בעזרת גרף לא-מכוון. כל אחד מחלקי העיר יוצג על ידי קדקוד, וגשר בין שני חלקים יוצג על ידי צלע. הגרף המתקבל נראה בתרשים 5.3.1 משמאל. זהו למעשה מולטי-גרף. אוילר הוכיח טענה כללית המאפיינת את הגרפים שבהם קיים מסלול כזה.



תרשים 5.3.1: העיר קניגסברג וגרף אוילר המתאים.

הגדרה 5.3.1: יהי $G = (V,E)$ גרף. מסלול (לא בהכרח פשוט) שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא **מסלול אוילר**. בדומה, מעגל (לא בהכרח פשוט) שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא **מעגל אוילר**.

משפט 5.3.2 (אוילר):
1. יהי G גרף קשיר לא מכוון. ב- G יש מעגל אוילר אם ורק אם כל הדרגות בגרף זוגיות.
2. יהי G גרף מכוון קשיר. ב- G יש מעגל אוילר אם ורק אם דרגת הכניסה של כל קדקוד שווה לדרגת היציאה של הקדקוד.

הוכחה: יהי G גרף לא-מכוון (ההוכחה לגרף מכוון דומה). כרגיל עלינו להוכיח שני כיוונים.
הכרחיות: נניח כי קיים ב- G מעגל אוילר. יהי x קדקוד כלשהו בגרף. כל מעבר של המעגל דרך x תורם 2 לדרגתו (צלע אחת בכניסה וצלע אחת ביציאה). בנוסף, מכיוון שזה מעגל אוילר והוא מבקר בכל הצלעות פעם אחת בדיוק, אז ייספרו כל הצלעות שחלות ב- x בדיוק פעם אחת. ולכן x בעל דרגה זוגית. נעיר שהטענה תקפה גם עבור הקדקוד הראשון במעגל (סופרים 1 ביציאה הראשונה ממנו, 2 בכל פעם שחוזרים אליו ויוצאים ממנו, ולבסוף עוד 1 כשחוזרים אליו בסיום).
מספיקות: נניח כעת שלכל הקדקודים דרגה זוגית ונראה שקיים מעגל אוילר. נוכיח תחילה את טענת העזר הבאה.

טענה 5.3.3: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון שכל דרגותיו זוגיות. אז כל קדקוד ב- G שדרגתו חיובית שייך למעגל כלשהו (לאו דווקא פשוט).
הוכחה: יהי v_0 קדקוד שדרגתו חיובית. נצא מהקדקוד v_0 ונטייל בגרף באופן כלשהו תוך כדי שמירת הכלל שלא לחזור על אותה צלע פעמיים. כיוון שמספר הצלעות ברכיב הקשירות של v_0 סופי, ואנו מבקרים בכל צלע לכל היותר פעם אחת, התהליך חייב להסתיים. נניח שהתהליך מסתיים בכך שהגענו לקדקוד x ואיננו יכולים להמשיך. נראה שבהכרח $x = v_0$ ולכן לפנינו מעגל כנדרש. ואכן, אם $x \neq v_0$, אז כל מעבר של המסלול ב- x תורם 2 לדרגתו של x (כי $x \neq v_0$ אינו הראשון במסלול) פרט לצעד האחרון שתרם 1 לדרגתו של x. לכן דרגת x אי-זוגית, בסתירה להנחה שכל הדרגות בגרף זוגיות. □

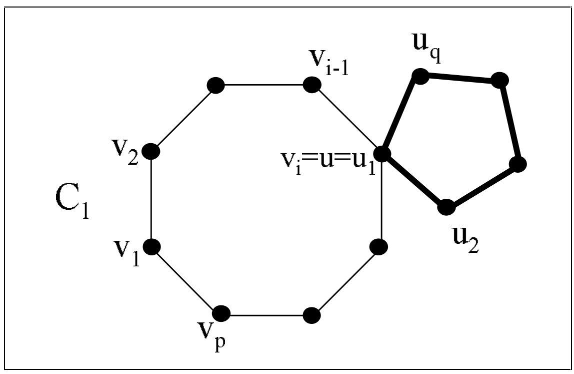
המשך הוכחת משפט 5.3.2: כעת נחזור להוכחת המשפט. יהי v קדקוד כלשהו בגרף. לפי טענה 5.3.3 קיים מעגל:

$$C_1 = (v = v_1,v_2,\ldots,v_p,v_1 = v)$$

הכולל את v. אם המעגל הזה כולל כבר את כל צלעות הגרף - סיימנו. אחרת, נתבונן בגרף G_1 המתקבל מ- G לאחר הורדת כל הצלעות המשתתפות במעגל C_1. גם בגרף G_1 כל הדרגות זוגיות, כי כל דרגה בו היא הפרש בין שני מספריים זוגיים (דרגת הקדקוד ב- G ודרגתו במעגל).
יהי $u = v_i$ קדקוד כלשהו לאורך המעגל $C_1 = (v_1,\ldots,v_i = u,\ v_{i+1},\ldots,v_p,v_1)$ שדרגתו בגרף G_1 חיובית. שוב לפי טענה 5.3.3, קיים בגרף G_1 מעגל $(u = u_1,u_2,\ldots,u_q,u_1 = u)$ שמתחיל ב- u. נשלב את המעגל הזה לתוך המעגל C_1 באופן הבא לקבלת מעגל חדש ארוך יותר:

$$C_2 = (v_1,\ldots,v_i = u_1,u_2,\ldots,u_q,u_1,\ v_{i+1},\ldots,v_p,v_1),$$

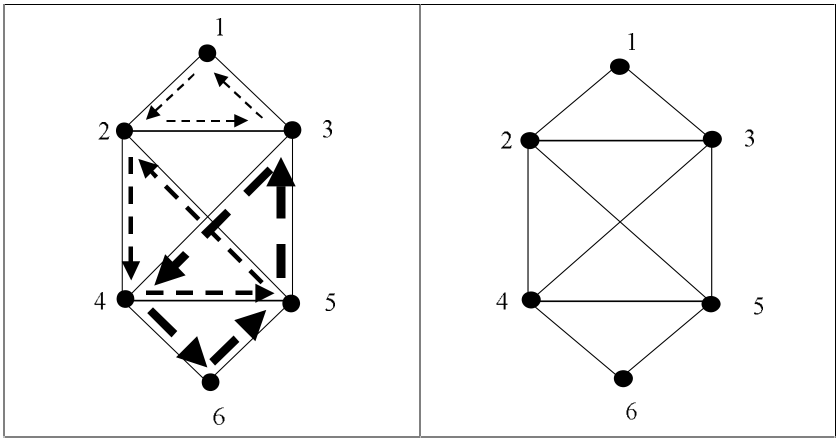
כפי שמראה תרשים 5.3.2. קיבלנו מעגל חדש C_2 ארוך יותר בגרף G. יהי G_2 הגרף המתקבל על ידי השמטת צלעות המעגל C_2 מהגרף G. נחזור על התהליך שוב ושוב עד שהמעגל המתקבל C_k יכיל את כל צלעות הגרף.
השאלה היחידה שעדיין דורשת בירור היא זו: מדוע לא ייתכן שבשלב כלשהו של התהליך הזה, בנינו מעגל C_k שעדיין איננו כולל את כל צלעות הגרף, אבל אין קדקוד השייך למעגל הזה שדרגתו חיובית בגרף G_k? לשם השלמת ההוכחה די שנראה כי אם בגרף G_k עדיין נותרו צלעות אז יש גם קדקוד ב- C_k שדרגתו ב- G_k חיובית. ואכן, אם כל קדקודי G כבר נמצאים ב- C_k, אז כל קדקוד ב- G_k שלא כל צלעותיו ב- C_k יתאים לצרכינו. מאידך, אם C_k כולל רק חלק מקדקודי G אז לפי טענה 5.1.12, יש קדקוד x שאינו שייך למעגל C_k שיש לו שכן y במעגל C_k (וזאת מכיוון ש- G קשיר). לקדקוד הזה y יש דרגה חיובית ב- G_k כי $\{x,y\}$ צלע ב- G_k. □



תרשים 5.3.2: שילוב המעגל החדש בתוך המעגל C_1.

שימו לב שההוכחה שנתנו זה עתה ניתנת לתרגום פשוט לאלגוריתם יעיל המוצא מעגל אוילר בגרף קשיר שכל דרגותיו זוגיות. זהו מצב אופייני כשהוכחה של משפט קומבינטורי מספקת באותה הזדמנות גם אלגוריתם יעיל.

דוגמה 5.3.4: נמצא מעגל אוילר בגרף שבתרשים 5.3.3 מימין, בעזרת השיטה שתוארה בהוכחה של משפט אוילר. תחילה נמצא את המעגל (1,2,3,1). אח״כ את המעגל (2,4,5,2) ולאחר שילוב המעגלים נקבל את המעגל (1,2,4,5,2,3,1). אח״כ נמצא את (4,6,5,3,4) ושוב לאחר שילוב המעגלים נקבל מעגל אוילר (1,2,4,6,5,3,4,5,2,3,1).



תרשים 5.3.3: מציאת מעגל אוילר בגרף מימין.
משמאל מסומנים שלושת המעגלים שמשולבים ליצירת מעגל אוילר אחד.

מסקנה 5.3.5: בגרף קשיר לא-מכוון יש מסלול אוילר אם ורק אם יש בו 0 או 2 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

הוכחה: עלינו להוכיח שני כיוונים.

הכרחיות: כמו בהוכחת משפט 5.3.2. ההבדל היחיד הוא שהטענה בדבר זוגיות הדרגה של הקדקודים לאורך המסלול אינה תקפה לקדקוד הראשון והאחרון במסלול (למעט אם זה אותו הקדקוד).

מספיקות: אם כל הדרגות זוגיות אז על פי משפט 5.3.2 יש אפילו מעגל אוילר. נניח אם כן שיש שני קדקודים a,b שדרגתם אי-זוגית. כדי למצוא מסלול אוילר נבצע **רדוקציה** (צמצום) לבעיה של גרף עם דרגות זוגיות. נוסיף קדקוד חדש z וצלעות (a,z), (z,b). קיבלנו גרף חדש קשיר שכל דרגותיו זוגיות. לכן קיים בו מעגל אוילר, שמתחיל ומסתיים ב- a. נשמיט מהמעגל את הצלעות שהוספנו ואת הקדקוד z, ונקבל מסלול אוילר שמתחיל ב- a ומסתיים ב- b. □

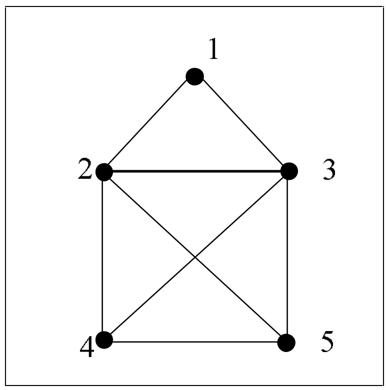
מושג הרדוקציה שהוצג בהוכחה האחרונה הוא כלי חשוב בהוכחת טענות מתמטיות. כדי להבהירו נפתח בבדיחה. אין הרבה בדיחות על מתמטיקאים, אך הנה אחת. שואלים קבוצת אנשים את השאלה הבאה: אתם נמצאים בחברת אורחיכם בסלון ביתכם והם מבקשים כוס תה. מה תעשו? התשובה של כולם היא: אלך למטבח, ארתיח מים בקומקום, אכין תה ואביא לאורחים. עתה משנים את השאלה: אתם נמצאים במטבח, בידיכם קומקום מים רותחים וברצונכם להגיש תה לאורחים שבסלון. מה תעשו? רוב האנשים יאמרו: אמזוג תה ואביא לאורחי. המתמטיקאי עונה: אניח לקומקום, אלך לסלון, ומשם כבר ידוע לי איך לפתור את הבעיה.

מה שעשה המתמטיקאי הוא **צמצום** (רדוקציה בלעז) של הבעיה החדשה לבעיה שפתרונה כבר ידוע. הגישה הזו מועילה מאוד בפתרון מגוון גדול של בעיות. נמחיש זאת בעזרת הבעיה שזה עתה פתרנו: על מנת למצוא מסלול אוילר בגרף G שיש בו שני קדקודים בדרגה אי-זוגית, בנינו גרף חדש G' שכל דרגותיו זוגיות ולכן ידוע לנו איך לבנות ב- G' מעגל אוילר (זהו הצמצום לבעיה

המוכרת). יתר על כן, בהינתן המעגל C בגרף G' אנו יכולים לבנות ממנו על ידי השמטת הצלעות שהוספנו פתרון לבעיה המקורית – מסלול אוילר ב- G.

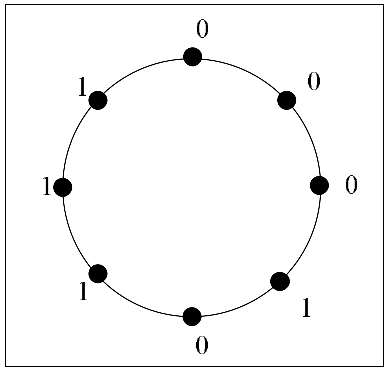
ואם כבר בבדיחות על מתמטיקאים עסקינן הנה עוד אחת (על חשבון הבית): קבוצת אנשים יוצאת לטיול בכדור פורח. בדרך משתבש משהו והם מאבדים את דרכם. הם מחליטים לנסות ולמצוא מישהו על הקרקע שיעזור להם להתמצא מחדש. והנה בשדה ריק הם רואים בן אדם. "הי" הם קוראים, "איפה אנחנו?" משתררת דממה ולאחר יותר מדקה נשמעת תשובתו של האיש "אתם טסים בכדור פורח". אחד האנשים בכדור הפורח אומר לחבריו: "האיש הזה הוא מתמטיקאי", ומסביר, "ראשית, הוא חשב לפני שהוא ענה. שנית, התשובה שהוא נתן הייתה מדויקת לגמרי. שלישית, היא הייתה חסרת כל ערך ממשי".

דוגמה 5.3.6: בגרף שבתרשים 5.3.4 יש מסלול אוילר. ואכן, לקדקודים 4,5 יש דרגות אי-זוגיות, ולכל יתר הקדקודים דרגות זוגיות. לכן יש מסלול אוילר המתחיל בקדקוד 4 ומסתיים בקדקוד 5. למשל, המסלול (4,3,2,5,3,1,2,4,5).



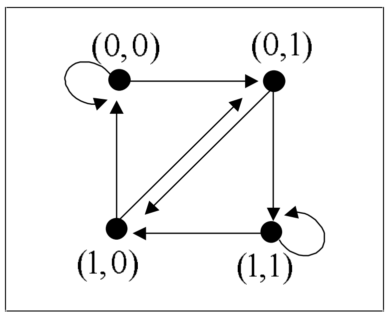
תרשים 5.3.4: גרף שיש בו מסלול אוילר.

דוגמה 5.3.7 (סדרות דה-ברויין De Bruijn): ברצוננו לבנות סדרה מעגלית של אפסים ואחדים באורך 2^n, כך שכל סדרה באורך n של 0,1 תופיע כתת-סדרה של הסדרה המעגלית. סדרה מעגלית כזאת נקראת סדרת **דה-ברויין**. בתרשים 5.3.5 אפשר לראות פתרון אפשרי ל- $n = 3$. שימו לב שאכן כל אחת מ- $2^3 = 8$ הסדרות באורך 3 של 0,1, מופיעה בדיוק פעם אחת כתת-סדרה לאורך המעגל שבתרשים.

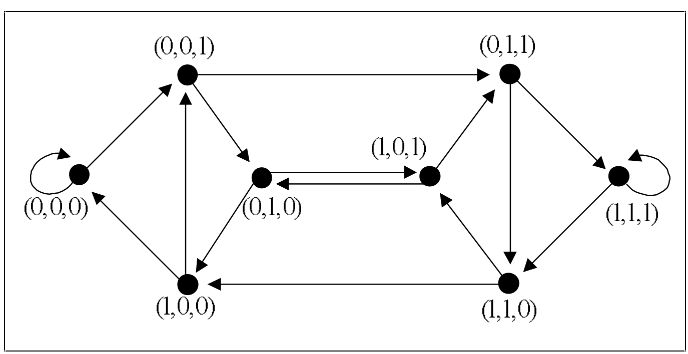


תרשים 5.3.5: סדרת דה-ברויין ל- $n = 3$.

נעשה זאת באופן הבא. נגדיר גרף מכוון עם 2^{n-1} קדקודים, שקדקודיו הם כל הסדרות באורך $n-1$ של **0,1**. כעת לכל קדקוד $x = (x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$, נוסיף צלע מ- x לקדקוד $(x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},0)$ וצלע מ- x לקדקוד $(x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},1)$. תרשים 5.3.6 מתאר את הגרף המתאים ל- $n = 3$. ואילו בתרשים 5.3.7 אפשר לראות את הגרף המתאים ל- $n = 4$.



תרשים 5.3.6: הגרף המתאים ל- $n = 3$.



תרשים 5.3.7: הגרף המתאים ל- $n = 4$.

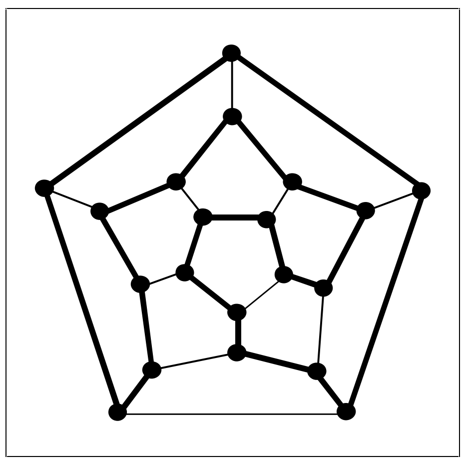
נשים לב שבגרף המתקבל יש מעגל אוילר, כי דרגת היציאה של כל קדקוד היא 2, וגם דרגת הכניסה של כל קדקוד היא 2, כלומר דרגת הכניסה של כל קדקוד שווה לדרגת היציאה של הקדקוד. נמצא אם כן מעגל אוילר בגרף שבנינו. כעת מתוך המעגל קל לבנות את הסדרה המעגלית הדרושה באופן הבא.
ניקח את הספרה הימנית ביותר של כל קדקוד לאורך המעגל שמצאנו, ונרכיב בדרך זו סדרה מעגלית באורך 2^n. כך למשל, אם נתחיל בקדקוד $(0,0,\ldots,0)$, הרי התו הראשון בסדרה המעגלית יהיה 0 כמובן. נניח שמעגל אוילר עובר כעת לקדקוד $(0,0,\ldots,0,x)$. נוסיף אם כן את x לסדרה המעגלית. כך למשל, הסדרה המתקבלת מהגרף בתרשים 5.3.7 היא:

$$0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0.$$

נראה כעת שהסדרה שבנינו בעזרת הגרף ומעגל אוילר, היא אכן סדרת דה-ברויין. נשים לב שיש התאמה חח״ע ועל בין צלעות הגרף לבין סדרות באורך n של אפסים ואחדים. כך הסדרה $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ מותאמת לצלע מהקדקוד $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ לקדקוד $(x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)$. לכן, מכיוון שמעגל אוילר מבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת, הרי הסדרה שאנו בונים מתוך מעגל אוילר, תבקר בכל צלע (תת-סדרה באורך n) בדיוק פעם אחת.

מעגל המילטון

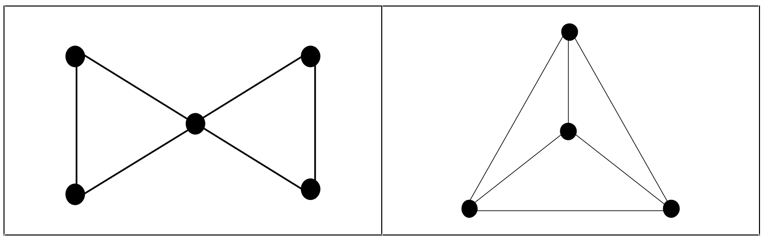
סר וויליאם המילטון, המציא משחק ״טיול מסביב לעולם״. נתונה מפה של ערי העולם ודרכים המקשרות את הערים. השאלה היא האם אפשר לבקר בכל ערי העולם, ולחזור לנקודת המוצא, כך שנבקר בכל עיר בדיוק פעם אחת (אין צורך לעבור בכל הדרכים).



תרשים 5.3.8: הגרף המקורי של המילטון, ועליו מסומן מעגל המילטון (זהו הגרף של הפאון המשוכלל הנקרא דודקהדר).

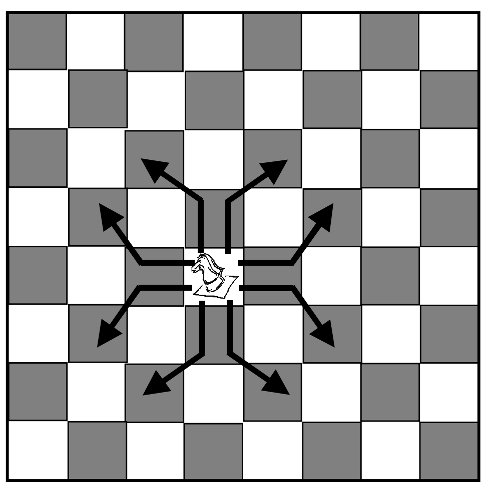
הגדרה 5.3.8: מעגל (מסלול) שמבקר בכל קדקוד של הגרף בדיוק פעם אחת נקרא **מעגל (מסלול) המילטון.**

בניגוד לאפיון הפשוט שמצא אוילר המאפשר לקבוע בקלות רבה האם בגרף כלשהו יש מעגל או מסלול אוילר, לא ידוע אפיון כזה עבור הבעיה של מציאת מעגל המילטון. נביט בבעיה החישובית המתאימה: נתון גרף G. האם יש בו מעגל המילטון? למיטב ידיעתנו זוהי בעיה חישובית קשה, במובן זה שלמרות מאמצים רבי שנים לא מוכר לנו אלגוריתם יעיל לפתרון הבעיה. במונחים של מדעי המחשב זו בעיה NP שלמה. דיון מלא במושגים אלה ייקח אותנו הרבה מעבר להיקף של ספר זה. לכן נעיר רק שפירוש הדבר הוא שבהינתן סדרת צלעות בגרף, קל לבדוק האם הן מהוות מעגל המילטון. יחד עם זאת, קשה חישובית למצוא מעגל המילטון.
אין זה אומר שאין כלל אלגוריתמים לפתרון הבעיה. אפשר למשל לעבור על כל $n!$ התמורות של הקדקודים, ולבדוק לכל אחת מהן האם היא מעגל המילטון. אף כי זהו אלגוריתם תקף לבעיה, הוא איננו יעיל בגלל קצב גידולה המהיר של הפונקציה $n!$.
שימו לב שיש גרפים בעלי מעגל המילטון וללא מעגל אוילר ולהיפך, כפי שמראה תרשים 5.3.9.



תרשים 5.3.9: מימין גרף ללא מעגל אוילר ועם מעגל המילטון. משמאל, גרף ללא מעגל המילטון שיש בו מעגל אוילר.

דוגמה 5.3.9: נתבונן בלוח שח. האם אפשר לכסות את כל משבצות הלוח על ידי צעדי פרש על פי הכללים הבאים: אסור לפרש לדרוך על משבצת פעמיים, ובסיום עליו לחזור לנקודת ההתחלה שלו? ראו תרשים 5.3.10.



תרשים 5.3.10: לוח שח והמהלכים החוקיים של פרש.

נייצג את לוח השח על ידי גרף באופן הבא. כל משבצת של הלוח תיוצג על ידי קדקוד בגרף. יש צלע מקדקוד u לקדקוד v אם הפרש יכול להגיע ממשבצת u למשבצת v על ידי מהלך חוקי של פרש. השאלה שאנו רוצים לפתור היא אם כן האם פרש יכול לבקר בכל קדקודי הגרף, מבלי לחזור על קדקוד פעמיים, ולחזור בסיום לנקודת ההתחלה. כלומר אנו מחפשים מעגל המילטון בגרף הנ"ל. אוילר פתר את הבעיה עבור לוח שח רגיל בגודל 8×8 והראה שהדבר אפשרי. מאוחר יותר הראו שהתשובה חיובית בעצם לכל לוח מגודל $n\times m$ כאשר $m \le n$, פרט למקרים הבאים:

1. n ו- m שניהם אי-זוגיים.
2. $m = 1,2,4$
3. $m = 3$ ו- $n = 4,6,8$.

קל לראות, למשל, שאם n,m שניהם אי-זוגיים אז אין פתרון לבעיה. נצבע את קדקודי הגרף שהתאמנו למשבצות הלוח בשני צבעים – שחור ולבן – על פי צבען של משבצות הלוח המתאימות. נשים לב שמהלך חוקי של פרש מעביר אותו ממשבצת בצבע שחור למשבצת בצבע לבן, או להיפך. לכן, אם קיים מעגל המילטון, אז הקדקודים לאורכו צריכים להיות צבועים לסירוגין בשחור ולבן. מכיוון שהפרש חוזר בסיום לנקודת ההתחלה שלו, מספר הקדקודים צריך להיות זוגי. וזה כמובן לא ייתכן אם n,m שניהם אי-זוגיים, כי אז $n\cdot m$ הוא מספר אי-זוגי.

ומה אם ברצוננו לכסות את כל המשבצות של לוח שח מגודל $n\times m$ על ידי צעדים חוקיים של פרש, כשהפעם הפרש אינו חייב לחזור לנקודת ההתחלה? במקרה זה אנו רוצים לדעת האם קיים **מסלול** המילטון בגרף המתאים כפי שהוגדר לעיל. מתברר שבמקרה זה יש פתרון לבעיה לכל $5 \le m \le n$.

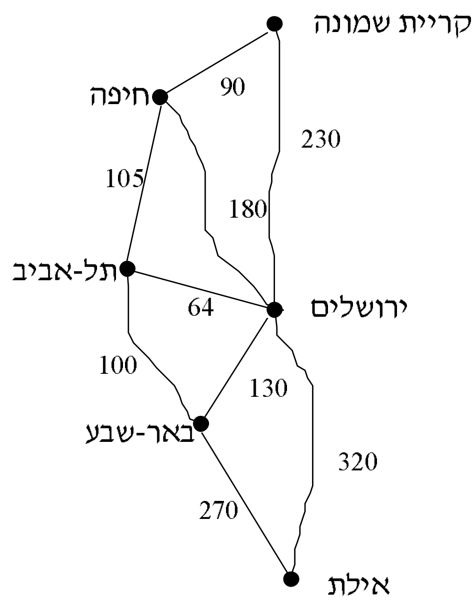
דוגמה 5.3.10 (צופן גריי Gray Codes): ברצוננו למצוא מסלול המילטון על הקוביה ה- d ממדית. זאת אומרת, עלינו למצוא סידור של כל 2^d הסדרות של 0,1 כך שבמעבר מסדרה לסדרה משנים בדיוק ביט אחד. הבניה שלנו היא אינדוקטיבית. נניח שפתרנו את הבעיה ב- d ממדים כשנקודת הסיום היא $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d) \in \{0,1\}^d$. הבניה ב- d+1 ממדים נראית כך: לוקחים את המסלול הקודם ומצרפים לכל קדקוד בו קואורדינטה (d+1)-ית שהיא תמיד 0. בפרט בקואורדינטות החדשות אנו מסיימים בנקודה ב- $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d,0)$. כעת לוקחים שוב את המסלול הישן מממד d, מצרפים לכל קדקוד בו קואורדינטה (d+1)-ית שהיא תמיד 1, אולם הפעם עוברים עליו מהסוף להתחלה, כלומר מתחילים בנקודה $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d,1)$. כדי לחבר את שני חלקי המסלול שיצרנו עוברים מהנקודה $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d,0)$ לנקודה $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d,1)$.

כך למשל, נפתור את הבעיה ל- $d = 3$. לשם פשטות, נסמן את הסדרות ללא סוגריים. נניח שכבר פתרנו את הבעיה ל- $d = 2$ וקיבלנו את המסלול הבא: $00\to10\to11\to01$.
כדי לחשב את המסלול ל- $d = 3$ נוסיף קואורדינטה 0 לכל קדקוד במסלול הזה ונקבל את המסלול החלקי: $000\to100\to110\to010$. כעת, נוסיף שוב לכל קדקוד במסלול הישן קואורדינטה 1, אולם נעבור על המסלול מהסוף להתחלה: $011\to111\to101\to001$. כעת נחבר את שני חלקי המסלול ונקבל מסלול המילטון בקוביה התלת-ממדית:

$$000\to100\to110\to010\to011\to111\to101\to001$$

בעיית הסוכן הנוסע

הרחבה של בעיית מעגל המילטון היא **בעיית הסוכן הנוסע**. סוכן מתבונן במפת הכבישים של מדינת ישראל. הוא רוצה לבקר בכל אחת מערי הארץ, בכל עיר פעם אחת בדיוק, ולחזור בסיום לנקודת ההתחלה של מסעו. בהינתן מפת הדרכים והמרחקים, המטרה היא למצוא מסלול קצר ביותר שיבקר בכל עיר פעם אחת ויסתיים בנקודת המוצא. נייצג את מפת הדרכים על ידי גרף שבו כל עיר מיוצגת על ידי קדקוד, ודרך בין שתי ערים היא צלע בין הקדקודים המתאימים שעליה רשום אורך הדרך. לכן, ברצוננו למצוא מעגל המילטון כך שסכום האורכים על הצלעות המשתתפות בו קטן ככל האפשר.



תרשים 5.3.11: מפה חלקית של כבישי ישראל.

לא ידוע אלגוריתם יעיל כללי הפותר בעיה זו, אולם למקרים מסוימים נמצאו פתרונות יעילים. ניתן לשאול כמה שאלות אלגוריתמיות בהקשר זה.

1. בעיית קיום: האם יש בכלל מעגל פשוט המבקר בכל קדקודי הגרף?
2. בעיית מניה: כמה מסלולים שונים עומדים בפני הסוכן?
3. בעיית אופטימיזציה: איזה מסלול מתוך כל המסלולים הוא הקצר ביותר?

את בעיית המילטון ניתן לנסח גם לגרפים מכוונים. נדגים זאת על ידי משפט של סלה Szele. נניח שיש טורניר טניס בהשתתפות n שחקנים (לקוראים שאינם בקיאים ברזי הספורט נעיר: בטורניר כל שני שחקנים מתחרים זה בזה בדיוק פעם אחת. בטניס המשחק מסתיים תמיד

בניצחון אחד השחקנים). נייצג את תוצאות המפגשים בין השחקנים באמצעות גרף מכוון. הקדקודים של הגרף המכוון מייצגים את השחקנים המתחרים. בין כל שני קדקודים יש צלע, והצלע מכוונת מ- x ל- y אם שחקן x גבר על שחקן y במפגש ביניהם (ולהיפך אם y גבר על x). לגרף מכוון כזה קוראים **תחרות**.

הגדרה 5.3.11: גרף מכוון שבו לכל שני קדקודים x,y קיימת הצלע (x,y) או הצלע (y,x), אך לא שתיהן, נקרא **תחרות**.

משפט 5.3.12 (Szele): בכל גרף תחרות יש מסלול המילטון.
הוכחה: תרגיל לקוראים. ראו תרגיל 5. □

ואם נשוב לבעיית הטניס, פירוש הדבר שבכל טורניר טניס ניתן לסדר את השחקנים בסדר כלשהו $x_1,\ldots,x_n$, כך שלכל $1 \le i \le n-1$ שחקן x_i גבר על שחקן x_{i+1}.

תרגילים

1. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שניתן לפרק את קבוצת הצלעות של גרף קשיר לא-מכוון G ל- k מסלולים זרים בצלעות (המקרה $k = 1$ הוא בעיית מסלול אוילר).

2. במוזיאון ישראל תלויות התמונות משני צדי המסדרונות. בפני המבקרים במוזיאון עומדת הבעיה כיצד לראות את כל התמונות מבלי לבקר במסדרון יותר מפעמיים, כאשר בכל מעבר במסדרון הם מתבוננים על התמונות התלויות בצדו האחד של המסדרון. בסיום המבקרים רוצים לחזור כמובן לנקודת המוצא. הוכיחו שתמיד אפשר לערוך טיול כזה במוזיאון.
הדרכה: נייצג את המוזיאון על ידי גרף לא-מכוון. נקודות מפגש בין מסדרונות יהיו קדקודים, והמסדרונות יהיו צלעות הגרף. ביקור במוזיאון שקול לטיול דו-כיווני על כל הצלעות של הגרף. כלומר, על כל צלע עוברים בדיוק פעמיים, פעם אחת לכל כיוון. הראו שתמיד ניתן לערוך טיול כזה בגרף לא-מכוון.

3. כמה מעגלים פשוטים שונים ייתכנו לכל היותר בגרף?

4. הוכיחו את משפט אוילר באינדוקציה.

5. א. הוכיחו באינדוקציה שבגרף מכוון שהוא תחרות יש מסלול המילטון.
הדרכה: הראו איך ניתן לשלב את הקדקוד ה- (n+1) בסידור של n הקדקודים הקודמים.
ב. הוכיחו שבכל תחרות שהיא גרף מכוון קשיר חזק יש מעגל המילטון.

6. יהיו k,n שני מספרים טבעיים. הראו איך לבנות סדרה מעגלית w באורך k^n מהאותיות של הא״ב $\{1,2,\ldots,k\}$, כך שכל אחת מ- k^n המילים באורך n שאפשר לבנות מהא״ב הנ״ל תופיע פעם ואחת ויחידה כרצף בסדרה w.
הערה: זו הרחבה של דוגמה 5.3.7 שעסקה בסדרות דה-ברויין הבנויות מאותיות הא״ב $\{0,1\}$, כלומר $k = 2$.

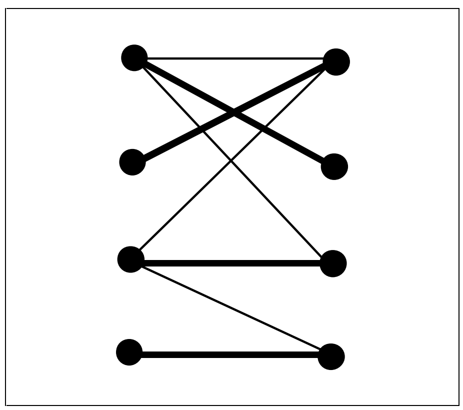
7. תרגיל זה הוא קצת יותר חידה מבעיה. כזכור הצריח במשחק שח יכול לעבור בכל צעד במאוזן או במאונך מספר כלשהו של משבצות על הלוח. נאמר שבצעד כזה הצריח **ביקר** בכל המשבצות שדרכן הוא עבר.
   א. הוכיחו שהצריח יכול לבקר בכל משבצות הלוח תוך 15 צעדים.
   ב. הוכיחו שלא ניתן לבקר בכל המשבצות במספר צעדים קטן יותר.

5.4. זיווגים בגרפים

הנושאים שיוצגו: *בעיית הזיווג, זיווג, זיווג מושלם, משפט Hall (משפט החתונה), מסלול מתחלף ומסלול הרחבה, משפט Tutte, מטריצה דו-סטוכסטית, הפרמננטה.*

בסעיף זה נתבונן במצב הבא: יש לפנינו קבוצה של n גברים ושל n נשים עם יחסי היכרות ביניהם. אנו רוצים לשדך ביניהם (גבר אחד לאישה אחת ולהיפך), כאשר ניתן לשדך רק גבר ואישה שיש ביניהם יחס היכרות. הבעיה היא האם אכן ניתן למצוא שידוך כזה, במצב נתון של יחסי היכרות. על מנת לנסח את הבעיה במונחי תורת הגרפים נגדיר תחילה את מושג הזיווג בגרף.

הגדרה 5.4.1: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. **זיווג** ב- G הוא אוסף M של צלעות שלאף שתיים מהן אין קדקוד משותף. הזיווג M נקרא **מושלם** אם כל קדקודי הגרף משתתפים בזיווג. אם $\{u,v\}\in M$ נאמר שהקדקודים u ו- v **מזווגים** על ידי הזיווג M.



תרשים 5.4.1: זיווג מושלם בגרף דו-צדדי. צלעות הזיווג מודגשות.

בניסוח של תורת הגרפים הבעיה שלנו היא זו: נתון גרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$ כך ש- $|V_1| = |V_2| = n$. בדוגמה שלנו V_1 היא קבוצת הגברים, V_2 קבוצת הנשים, ויש צלע בין גבר לאישה אם יש ביניהם יחס היכרות. באילו תנאים יש בגרף G זיווג מושלם?
לפני שניגש לפתרון השאלה, נעיר כי שאלות מסוג זה מופיעות בבעיות מעשיות רבות של אופטימיזציה. במקום לשדך גברים ונשים, אנו יכולים למשל לחשוב על השמה של עובדים לתפקידים, כאשר יש צלע $\{x,y\}\in E$ כש- x עובד ו- y תפקיד אם x כשיר למלא את התפקיד y.

המשפט הבא, הידוע גם בשם **משפט החתונה**, מגדיר את התנאים שבהם יש זיווג מושלם בגרף דו-צדדי. נזכיר שאם S קבוצה של קדקודים, אז $\Gamma(S)$ מסמן את קבוצת הקדקודים השכנים לקדקודי הקבוצה S (ראו הגדרה 5.1.3).

משפט 5.4.2 (Hall): בגרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$, $|V_1| = |V_2|$, יש זיווג מושלם אם ורק אם לכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

הוכחה: עלינו להוכיח הכרחיות ומספיקות.

הכרחיות: הוכחת ההכרחיות פשוטה ביותר. ודאי שלא ניתן לשדך את כולם אם יש קבוצה של גברים שאוסף כל הנשים שהם מכירים קטן ממספרם. פורמלית נאמר כך: נניח שיש בגרף G זיווג מושלם, ותהי $S\subseteq V_1$. לכל קדקוד $s\in S$ יש בן-זוג בזיווג, ולכן $|\Gamma(S)| \geq |S|$ (זהו למעשה מקרה פרטי של עיקרון שובך היונים, ראו סעיף 4.5).

מספיקות: נניח כעת שלכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$. נוכיח באינדוקציה על מספר הקדקודים n ב- V_1 שיש זיווג מושלם M ב- G.

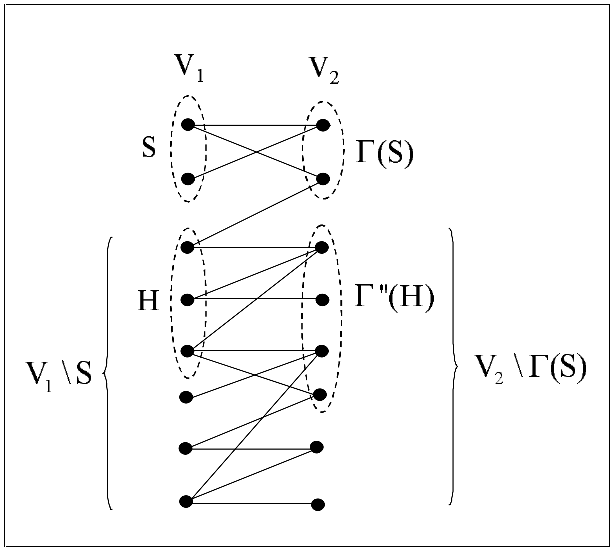
בסיס האינדוקציה: $|V_1| = |V_2| = n = 1$. הגרף G כולל במקרה זה שני קדקודים וצלע ביניהם, ולכן הטענה מובנת מאליה.

שלב האינדוקציה: נניח כעת נכונות לגרפים שבהם $|V_1| = n-1$ ונוכיח לגרפים שבהם $|V_1| = n$.

ייתכנו שני מקרים:

1. לכל קבוצה חלקית ממש $S \subsetneq V_1$ מתקיים אפילו האי-שוויון החזק יותר $|\Gamma(S)| \geq |S| + 1$: יהי $x\in V_1$ קדקוד כלשהו. לפי ההנחה יש ל- x שכן (בעצם על פי ההנחה יש ל- x אפילו לפחות שני שכנים). נבחר אחד מהם $y\in V_2$. נכלול את הצלע $\{x,y\}$ בזיווג M המבוקש ונשמיט את הקדקודים x,y מהגרף. יהי $G' = G\setminus\{x,y\}$ הגרף החדש, ונסמן על ידי $\Gamma'(S)$ את קבוצת השכנים של S בגרף G'. קל לראות שבגרף החדש G' לכל קבוצה $S\subseteq V_1\setminus\{x\}$ מתקיים $|\Gamma'(S)| \geq |S|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם ב- G'. נוסיף לזיווג הזה את הצלע $\{x,y\}$ ונקבל זיווג מושלם בגרף המקורי G.
2. קיימת לפחות קבוצה אחת חלקית ממש $S \subsetneq V_1$, כך ש- $|\Gamma(S)| = |S|$: במקרה זה נתבונן בגרף הדו-צדדי $G_S = (S, \Gamma(S), E_S)$, כאשר E_S היא קבוצת כל הצלעות בין קדקודים מ- S ל- $\Gamma(S)$. קל לוודא שגם הגרף הזה מקיים את הנחת המשפט, וכן שבגרף הזה יש פחות קדקודים מאשר בגרף המקורי G, שהרי $|S| < |V_1|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה קיים זיווג מושלם M_S ב- G_S. נשמיט מהגרף G את קבוצות הקדקודים S ו- $\Gamma(S)$ ואת כל הצלעות ביניהם. יהי $G'' = (V_1\setminus S, V_2\setminus\Gamma(S), E'')$ הגרף המתקבל, ותהי $H\subseteq V_1\setminus S$ קבוצה כלשהי. נסמן על ידי $\Gamma''(H)$ את קבוצת השכנים של H בגרף G''. אז מתקיים $|\Gamma''(H)| \geq |H|$. אחרת, אם נניח בשלילה ש- $|\Gamma''(H)| < |H|$, אז בגרף G היה מתקיים:
$$|\Gamma(H\cup S)| = |\Gamma''(H)| + |\Gamma(S)| < |H| + |S| = |H\cup S|\ .$$
השוויון הראשון נכון כיוון שהקבוצות $\Gamma(S)$ ו- $\Gamma''(H)$ מהוות חלוקה של קבוצת השכנים של $H\cup S$ ב- G. ואילו השוויון האחרון נכון כיוון ש- H,S קבוצות זרות (ראו תרשים 5.4.2). אולם זאת סתירה לכך שבגרף G לכל קבוצה $T\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(T)| \geq |T|$ (הסתירה מושגת לקבוצה $T = S\cup H$). לכן גם הגרף G'' מקיים את תנאי המשפט. מכאן לפי הנחת האינדוקציה יש בגרף G'' זיווג מושלם M''. נוסיף לזיווג הזה את הזיווג M_S ונקבל זיווג מושלם $M = M_S \cup M''$ בגרף G המקורי.

קיבלנו בכל מקרה זיווג מושלם M ב- G, ולכן המשפט נכון. □



תרשים 5.4.2: מקרה 2 בהוכחת הכיוון השני של משפט Hall.

מסקנה 5.4.3: יהי $G = (V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי d-רגולרי. אז יש ב- G זיווג מושלם.

הוכחה: תהי $S\subseteq V_1$ ותהי F קבוצת כל הצלעות החלות ב- S. הגרף d-רגולרי ולכן $|F| = d\cdot|S|$. תהי H קבוצת כל הצלעות החלות ב- $\Gamma(S)$. שוב מכיוון שהגרף d-רגולרי אז $|H| = d\cdot|\Gamma(S)|$. אולם $F \subseteq H$, כי כל צלע שחלה בקדקוד של S חלה גם ב- $\Gamma(S)$. ולכן, $|F| \le |H|$. לכן, $d\cdot|S| \le d\cdot|\Gamma(S)|$ ומכאן $|S| \le |\Gamma(S)|$ לכל קבוצה $S\subseteq V_1$. לכן, לפי משפט 5.4.2 יש זיווג מושלם ב- G. □

את מושג הזיווג בגרף דו-צדדי אפשר להרחיב גם לגרפים כלליים. כאמור זיווג M הוא אוסף של צלעות ללא קדקודים משותפים, והזיווג M מושלם אם כל קדקוד ב- G חל בצלע כלשהי של M. מושג הזיווג מעורר באופן טבעי את הבעיות האלגוריתמיות הבאות: בהינתן גרף $G = (V,E)$ נרצה לחשב מהו הגודל המירבי של זיווג ב- G, ובפרט נרצה להכריע האם יש ב- G זיווג מושלם. אף כי הנושא לא יידון במלואו בספר זה, אנו נוכיח את המשפט הבא שעומד ביסודם של כמה מהאלגוריתמים היעילים לפתרון הבעיה.

הגדרה 5.4.4: יהי M זיווג בגרף $G = (V,E)$, ויהי P מסלול פשוט מהצורה $P = (x_1,\ldots,x_k)$, כלומר $x_i \ne x_j$ לכל $i \ne j$. נאמר ש- P הוא **מסלול מתחלף** אם צלעותיו נמצאות לסירוגין מחוץ ל- M וב- M. נאמר ש- P **מסלול הרחבה** לזיווג M אם מתקיימים התנאים הבאים:

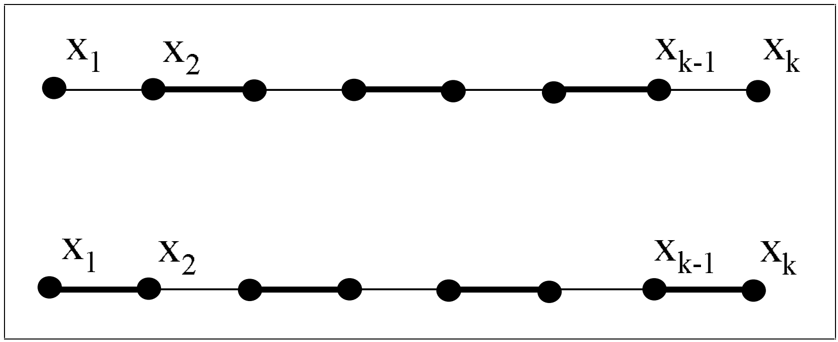
1. הקדקודים x_1, x_k (הראשון והאחרון במסלול P) אינם מכוסים על ידי אף צלע של M.
2. P מסלול מתחלף, היינו: $\{x_1,x_2\} \notin M, \{x_2,x_3\} \in M, \{x_3,x_4\} \notin M,\ldots, \{x_{k-1},x_k\}\notin M$.

קל לראות שמסלול הרחבה P כנ"ל מאפשר לנו לעבור מהזיווג M לזיווג גדול יותר M' המוגדר על ידי:

$$M' = M \setminus \{\{x_2,x_3\}, \{x_4,x_5\},\ldots\} \cup \{\{x_1,x_2\}, \{x_3,x_4\},\ldots,\{x_{k-1},x_k\}\}.$$

קל לוודא שאכן M' זיווג ומתקיים $|M'| = |M| + 1$. ראו תרשים 5.4.3.

הערה: שימו לב, לפי ההגדרה מסלול הרחבה P אינו חייב לכלול את כל הצלעות של הזיווג M. הוא בהחלט יכול לכלול רק חלק מהצלעות של M.



תרשים 5.4.3: למעלה, מסלול הרחבה וצלעות הזיווג M מודגשות. למטה, צלעות הזיווג M' מודגשות.

המשפט הבא אומר שדוגמה זו אינה מקרית.

משפט 5.4.5: יהי $G = (V,E)$ גרף ו- M זיווג בו. אז יש זיווג N ב- G מעוצמה גדולה יותר מ- M, כלומר $|N| > |M|$, אם ורק אם יש מסלול הרחבה לזיווג M.
הוכחה: כפי שראינו, קיום מסלול הרחבה מאפשר לנו למצוא זיווג בעל יותר צלעות מ- M. עלינו להראות לכן רק שאם $|M| < |N|$ ו- N זיווג, אז יש מסלול הרחבה ל- M. ואכן, נביט בקבוצת הצלעות $M\oplus N = (M\setminus N) \cup (N\setminus M)$ (ההפרש הסימטרי של M,N), ובגרף $G' = (V, M\oplus N)$ הכולל בדיוק את קבוצת הצלעות הזאת. בכל קדקוד של הגרף G' חלות לכל היותר שתי צלעות, ואם אכן חלות שתי צלעות אז אחת מהן שייכת ל- $M\setminus N$ והשנייה ל- $N\setminus M$. מכיוון שכל צלע בגרף G' שייכת ל- $M\setminus N$ או ל- $N\setminus M$, אז כל רכיב קשירות של G' הוא מסלול מתחלף או מעגל מתחלף. עובדה זו מתבססת על טענת העזר הבאה המושארת לקוראים כתרגיל:

טענת עזר: אם בגרף כלשהו יש לכל קדקוד דרגה ≤ 2, אז הגרף הוא איחוד של מסלולים ומעגלים.

אולם $|M| < |N|$, ולכן יש בהכרח לפחות רכיב קשירות אחד של G' שבו מספר הצלעות מ- $N\setminus M$ עולה על מספר הצלעות השייכות ל- $M\setminus N$. רכיב כזה הוא בהכרח מסלול מתחלף שהצלע הראשונה והאחרונה שלו שייכת ל- $N\setminus M$. מסלול כזה הוא מסלול הרחבה כפי שטענו. □

הקוראים אולי ישאלו את עצמם אם אין אפיון לגרפים כלליים של הגרפים שבהם יש זיווג מושלם (בדומה למשפט 5.4.2 הדן בגרפים דו-צדדיים). בעיה זו נפתרה על ידי טאט Tutte שאת משפטו נצטט ללא הוכחה. יהי $G = (V,E)$ גרף ותהי $S\subseteq V$ קבוצת קדקודים. נביט ברכיבי

הקשירות של הגרף $G\setminus S$, ונבחין בין אלה שיש בהם מספר זוגי או אי-זוגי של קדקודים. נסמן ב- α_S את מספר רכיבי הקשירות של $G\setminus S$ בעלי מספר אי-זוגי של קדקודים.

משפט 5.4.6 (Tutte): בגרף $G = (V,E)$ יש זיווג מושלם אם ורק אם לכל $S\subseteq V$ מתקיים $\alpha_S \le |S|$.

את ההכרחיות של התנאי במשפט 5.4.6 תתבקשו להוכיח בתרגיל 5. הוכחת המספיקות קשה יותר.

הקוראים למדו כבר, אולי, באלגברה ליניארית את מושג הדטרמיננטה של מטריצה. הפרמננטה של מטריצה מוגדרת באופן דומה אך פשוט יותר. למושג הפרמננטה חשיבות פחותה באלגברה, אך יש בו עניין קומבינטורי ואלגוריתמי רב.

הגדרה 5.4.7: תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ממשית מסדר $n\times n$. **הפרמננטה** של A מוגדרת על ידי:

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}\,.$$

הסבר: אנו עוברים על האוסף של כל התמורות π על $\{1,2,\dots,n\}$. לכל תמורה כזו, אנו מכפילים את $a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}$ ומסכמים על פני כל התמורות π כנ"ל.

במילים פשוטות: הפרמננטה מוגדרת כמו הדטרמיננטה, אך ללא סימני ה- $\pm$ המופיעים בהגדרת הדטרמיננטה.

דוגמה 5.4.8: אם $n = 3$ והמטריצה A היא

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

אז:

$$\mathrm{Per}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

מקור העניין בפרמננטות הוא זה: יהי $G = (V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי שבו $|V_1| = |V_2| = n$. נגדיר את מטריצת השכנות $A = (a_{ij})$ מסדר $n\times n$ של הגרף, ששורותיה מתאימות לאיברי הקבוצה V_1 ועמודותיה לאיברי הקבוצה V_2. נקבע $a_{ij} = 1$ אם יש צלע בין $i\in V_1$ ל- $j\in V_2$. אחרת, $a_{ij} = 0$.

טענה 5.4.9: תהי A מטריצת השכנות של גרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$. אז $\mathrm{Per}(A)$ שווה למספר הזיווגים המושלמים ב- G.

הוכחה: ראו תרגיל 6. □

הערה: בניגוד לדטרמיננטה שניתן לחשבה באופן יעיל, חישוב מדויק של הפרמננטה של מטריצה הוא בעיה חישובית קשה. אך לאחרונה (חורף 2000) מצאו שלושה חוקרים (Jerrum, Sinclair, Vigoda) אלגוריתם יעיל המוצא קירוב טוב כרצוננו לפרמננטה של מטריצה.

מקור המושג הבא הוא בתורת ההסתברות.

הגדרה 5.4.10: אומרים שהמטריצה $A = (a_{ij})$ היא **דו-סטוכסטית** אם כל איבריה אי-שליליים (כלומר $a_{ij} \geq 0$ לכל i,j), וכן סכום האיברים בכל שורה ובכל עמודה של A הוא 1. דהיינו:

לכל i מתקיים $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, ולכל j מתקיים $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$.

משפט 5.4.11: אם A מטריצה דו-סטוכסטית אז $\text{Per}(A) > 0$.

הוכחה: היות שכל איברי A אי-שליליים, מובן ש- $\text{Per}(A) \geq 0$. אולם עלינו להראות שיש תמורה π כך שלכל i מתקיים $a_{i\pi(i)} > 0$. נטפל בשאלה כך: נרצה לחשוב על A כמעין מטריצת שכנות של גרף כלשהו (שימו לב שאיברי A הם לאו דווקא 0,1). נבנה גרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$ שבו $|V_1| = |V_2| = n$ ויש צלע $\{i,j\}\in E$ כש- $i\in V_1,\ j\in V_2$ אם ורק אם $a_{ij} > 0$.

טענת עזר: $\text{Per}(A) > 0$ אם ורק אם יש בגרף G שהגדרנו זיווג מושלם.

לכן, עלינו להוכיח עכשיו שבגרף G שהגדרנו יש זיווג מושלם. לשם כך נשתמש במשפט 5.4.2. עלינו להראות שלכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$. נניח בשלילה שקיימת קבוצה S שמפרה את התנאי הזה, כלומר $|\Gamma(S)| \leq |S|-1$. מה פירושו של התנאי הזה במונחי המטריצה A? נשים לב ש- S היא קבוצה של מספרי שורות במטריצה A. נביט בקבוצה $T = V_2 \setminus \Gamma(S)$ (הן כקבוצת קדקודים ב- G והן כקבוצת עמודות ב- A). הקבוצה T מכילה את כל הקדקודים ב- V_2 שאינם שכנים של הקדקודים ב- S. בתרגום למונחי A יוצא שאם $i\in S$ ו- $j\in T$ אז $a_{ij} = 0$. מצאנו אם כן חלק של המטריצה A מגודל $|S| \times |T|$ שכולו אפסים. נסדר מחדש (אם יש צורך) את שורותיה ועמודותיה של A כך שהגוש הזה של האפסים יהיה בחלקה העליון הימני של המטריצה. המטריצה המתקבלת תהיה מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

כאשר A_1 מטריצה מסדר $|S|\times|V_2\setminus T|$, המטריצה A_2 כולה אפסים והיא מסדר $|S|\times|T|$, המטריצה A_3 היא מסדר $|V_1\setminus S|\times|V_2\setminus T|$, ואילו A_4 מטריצה מסדר $|V_1\setminus S|\times|T|$.

סכום האיברים בכל עמודה של A_4 הוא 1 (זאת מכיוון שסכום האיברים בכל עמודה במטריצה A הוא 1, והעמודות בחלקה הימני של A המסתיימות במטריצה A_4 הרי מתחילות בגוש האפסים שבמטריצה A_2). לכן, סכום כל האיברים במטריצה A_4 הוא $|T|$. כמו-כן, מכיוון שסכום האיברים בכל שורה ב- A הוא 1, אז סכום האיברים בחלקה התחתון של A (במטריצות A_3,A_4) הוא $|V_1\setminus S| = |V_1| - |S| = n - |S|$. מובן שסכום האיברים ב- A_4 קטן או שווה לסכום האיברים במטריצות A_3,A_4 כאחד (כי כל האיברים ב- A אי-שליליים). לכן, $|T| \leq n - |S|$.

אולם לפי הנחתנו $|\Gamma(S)| \leq |S|-1$, ולכן

$$|T| = |V_2 \setminus \Gamma(S)| = n - |\Gamma(S)| \geq n - |S| + 1.$$

קיבלנו, אם כן, $n - |S| \geq |T| \geq n - |S| + 1$, וזו כמובן סתירה. □

משפט 5.4.11 מעורר באופן טבעי את השאלה מהו המינימום של $\text{Per}(A)$ אם A מטריצה דו-סטוכסטית מסדר $n\times n$ (הקוראים שלמדו את המושגים הנחוצים באנליזה מתמטית יוכלו

להוכיח שאכן המינימום מושג ושלא מדובר באינפימום). הקוראים מוזמנים להרהר רגע בשאלה ולהעלות את ההשערה הסבירה ביותר. קרוב לוודאי שתגיעו להשערה הבאה שהעלה ואן דר-וורדן Van der Waerden ב- 1927: המינימום מושג כש- A היא מטריצה שכל איבריה שווים ל- 1/n. השערה זו הוכחה למעלה מ- 50 שנים מאוחר יותר.

משפט 5.4.12 (Egorichev, Falikman): אם A מטריצה דו-סטוכסטית מסדר $n\times n$ אז $\mathrm{Per}(A) \geq \frac{n!}{n^n}$, והמינימום מושג אך ורק במטריצה שכל איבריה הם 1/n.

תרגילים

1. הראו שבגרף דו-צדדי d-רגולרי אפשר למצוא בדיוק d זיווגים מושלמים זרים שאיחודם שווה לכל צלעות הגרף. (במילים אחרות: **אינדקס הצביעה** של גרף דו-צדדי d-רגולרי הוא d, ראו תרגיל 4 בסעיף 5.5).

2. יהי $G = (V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי ונניח כי $|V_1| \leq |V_2|$. אומרים שזיווג M ב- G **ממצה** את V_1 אם $|M| = |V_1|$, כלומר כל קדקוד ב- V_1 משתתף בזיווג M. הוכיחו את המשפט הבא שהוא הרחבה של משפט 5.4.2: בגרף G כנ״ל יש זיווג הממצה את V_1 אם ורק אם לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$.
הדרכה: הוסיפו ל- V_1 עוד $|V_2| - |V_1|$ קדקודים השכנים לכל קדקוד ב- V_2. הפעילו את משפט 5.4.2 על הגרף המתקבל.

3. יהי G גרף לא מכוון שבו לכל קדקוד דרגה זוגית. הראו שניתן לכוון את צלעות G כך שדרגת היציאה של כל קדקוד תהיה שווה לדרגת הכניסה שלו.

4. **2-גורם (2-factor)** בגרף לא-מכוון $G = (V,E)$ הוא תת גרף פורש שבו לכל קדקוד יש דרגה 2. דהיינו, זהו אוסף של מעגלים זרים בקדקודים הכוללים את כל קדקודי הגרף. הוכיחו שאם G גרף d-רגולרי כאשר d זוגי, אז ניתן להציג את E כאיחוד של d/2 2-גורמים זרים.
הדרכה: היעזרו בשאלות 1 ו- 3.

5. הוכיחו כי התנאי במשפט 5.4.6 הכרחי. כלומר הראו כי אם בגרף $G = (V,E)$ יש זיווג מושלם אז לכל $S\subseteq V$ מתקיים $\alpha_S \leq |S|$.

6. תהי A מטריצת השכנות של גרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$, כאשר $|V_1| = |V_2| = n$. הוכיחו כי Per(A) שווה למספר הזיווגים המושלמים ב- G.

7. הוכיחו את השערת ואן דר וורדן ל- $n = 2$ (כלומר, הוכיחו את משפט 5.4.12 ל- $n = 2$).

8. תהיה A מטריצה דו-סטוכסטית מסדר $n\times n$. הוכיחו כי $\mathrm{Per}(A) \leq 1$. אפיינו את המטריצות שבהן מתקבל שוויון.

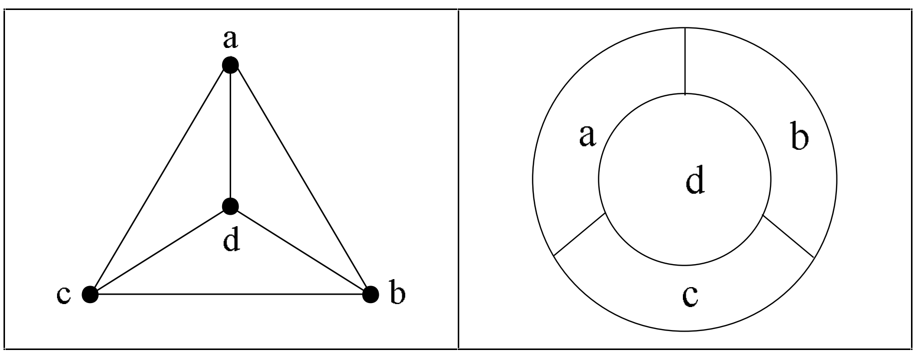
9. א. בליגת ספורט מסוימת משחקות n קבוצות. נניח ש- n זוגי. בכל מחזור משחקים נערכים n/2 משחקים. הראו שניתן לקיים $n-1$ מחזורי משחקים שבסיומם תתמודדנה כל שתי קבוצות בדיוק פעם אחת.

ב. הניחו כעת ש- n אי-זוגי והראו שניתן להפגיש כל שתיים מהקבוצות תוך n מחזורים. במקרה זה נערכים מדי מחזור $\frac{n-1}{2}$ משחקים וקבוצה אחת שובתת.

5.5. צביעה של גרפים

הנושאים שיוצגו: *בעיית ארבעת הצבעים, הגרף הדואלי של מפה, מושג הצביעה, מספר הצביעה, צביעה של גרפים מישוריים.*

אחת הבעיות הידועות ביותר בתולדות המתמטיקה היא בעיית ארבעת הצבעים (The four color problem). בעיה זו הוצגה על ידי פרנסיס גת׳רי Francis Guthrie ב- 1852, ונפתרה רק כ- 150 שנים אח״כ על ידי Appel ו- Haken. השאלה היא זו: כידוע, במפות מדיניות באטלס צובעים את השטח של כל מדינה בצבע כלשהו. נדרש כמובן ששתי מדינות הגובלות זו בזו תיצבענה בצבעים שונים על מנת שנוכל להבחין ביניהן (כאשר ההנחה היא שמדינות גובלות ביותר מנקודה אחת, כלומר לגבול בין מדינות יש אורך חיובי). כמו-כן אנחנו מעוניינים להשתמש במספר מזערי של צבעים למטרה זו. הבעיה היא מה ניתן לומר על מספר הצבעים שבעזרתו נוכל תמיד לבצע את המשימה. גת׳רי שיער שבכל מפה שנוכל לצייר, ניתן לצבוע את המדינות באופן המותר (לכל שתי מדינות גובלות יש צבע שונה) תוך שימוש בארבעה צבעים לכל היותר. לא קשה למצוא דוגמאות שבהן ארבעה צבעים אכן יידרשו ואין די בשלושה צבעים. למשל המפה שבתרשים 5.5.1 מימין.



תרשים 5.5.1: מפה מישורית והגרף הדואלי המתאים לה. מספר הצביעה הוא 4.

הוכחתם של Appel ו- Haken למשפט ארבעת הצבעים הייתה מיוחדת בין השאר בכך שזו הייתה הפעם הראשונה שבה הוכחה של משפט מתמטי חשוב הסתמכה באופן מכריע על שימוש במחשב. בעצם, עד עצם היום הזה, טרם נמצאה לבעיה זו הוכחה שאינה עושה שימוש נרחב במחשב (הוכחה אלטרנטיבית למשפט ארבעת הצבעים ניתנה לפני שנים ספורות על ידי Seymour, Robertson, Thomas, Sanders, אך גם הוכחה זו מסתמכת על כמות גדולה של חישובים במחשב). ברבות השנים התברר שהשאלה התמימה הזו אינה רק בגדר שעשוע אינטלקטואלי, ובעיות צביעה מתקשרות למגוון רחב של נושאים תיאורטיים ומעשיים כאחד. כדי להסביר את ההקשר

הרחב יותר ננסח תחילה את בעיית הצביעה של מפות מישוריות בשפה קצת שונה. בהינתן מפה מישורית M נתאים לה את מה שנקרא **הגרף הדואלי** שלה G. זהו גרף שקדקודיו הם הפאות ("המדינות") של המפה ושתי פאות הגובלות זו בזו מותאמות לזוג קדקודים שכנים בגרף G. במקרה זה מטרתנו לייחס צבעים לקדקודים של G והדרישה היא שלשני קדקודים סמוכים יהיה צבע שונה (ראו תרשים 5.5.1 משמאל). דיון זה מוביל אותנו להגדרה הכללית.

הגדרה 5.5.1: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון ו- k מספר טבעי. **k-צביעה** של G היא פונקציה $f:V\to\{1,2,\dots,k\}$ כך שאם $\{x,y\}\in E$ אז $f(x) \neq f(y)$. אומרים ש- $f(x)$ הוא **הצבע** של הקדקוד x בצביעה f. אם יש ל- G k-צביעה אז אומרים שהגרף G **k-צביע**. **מספר הצביעה** של G המסומן על ידי $\chi(G)$ הוא ה- k הקטן ביותר כך שהגרף G k-צביע.

בעזרת המושגים האלה ניתן לנסח עתה את משפט ארבעת הצבעים.

משפט 5.5.2 (Appel, Haken): כל גרף מישורי הוא 4- צביע.

הנה דוגמה הממחישה את החשיבות המעשית של מושג הצביעה. נניח שנתונה לנו רשימת מטלות שעלינו לבצע. יש מטלות שלא ניתן לבצע בעת ובעונה אחת מפני שביצועה של האחת מונע את ביצועה של האחרת. למען הפשטות נניח שביצוע כל משימה אורך בדיוק שעה אחת. מדובר במצב שעומד לרשותנו כוח אדם (או כוח חישוב) בלתי מוגבל, והקושי היחיד בהשלמה מהירה של המשימות נובע מכך שזוגות מסוימים של משימות חייבים להתבצע בזמנים שונים. אנו נתאר את הבעיה כך: נבנה גרף $G = (V,E)$ שקבוצת הקדקודים שלו V היא קבוצת המשימות שיש לבצע. צלע $\{x,y\}\in E$ מציינת את העובדה שהמשימות x,y אינן יכולות להתבצע באותה עת. בהינתן סדר פעולות אפשרי לביצוע המשימות, נסמן ב- $f(x)$ את השעה שבה מתבצעת המשימה x. קל לראות שתנאי האי-סימולטניות אומר שהפונקציה f היא צביעה של G. יוצא ש- $\chi(G)$ הוא בדיוק מספר השעות המזערי שבו ניתן לבצע את כל המשימות המוטלות עלינו.

התורה העוסקת בצביעת גרפים היא עשירה ונוכל להביא כאן רק מעט מזעיר ממנה. נפתח במשפט הפשוט הבא.

משפט 5.5.3: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. אם הדרגה המקסימלית של קדקודי הגרף היא r אז $\chi(G) \leq r+1$.

הוכחה: נבחר קדקוד כלשהו x ונצבע אותו באחד הצבעים. נמשיך ונבחר קדקוד שאינו צבוע ונצבע אותו בצבע שונה משל כל שכניו. הדבר אפשרי כי יש לכל קדקוד לכל היותר r שכנים ויש בידינו r+1 צבעים. נחזור על התהליך עד שנצבע את כל קדקודי הגרף. □

את המשפט הקודם ניתן לחזק כדלקמן (אנו מביאים את המשפט הבא ללא הוכחה):

משפט 5.5.4 (Brooks): אם G גרף קשיר שהדרגה המקסימלית בו היא r אז $\chi(G) \leq r$, למעט אם $r = 2$ ו- G מעגל אי-זוגי, או ש- G הוא הגרף השלם $G = K_{r+1}$.

ההוכחה הבאה מתקבלת כווריאציה קלה על ההוכחה של משפט 5.5.3.

משפט 5.5.5: כל גרף מישורי הוא 6-צביע.

הוכחה: נוכיח את המשפט באינדוקציה על המספר n של קדקודי הגרף.

בסיס האינדוקציה: עבור גרף עם לכל היותר 6 קדקודים המשפט ברור. פשוט נצבע כל קדקוד של הגרף בצבע שונה ונקבל צביעה חוקית.

שלב האינדוקציה: נניח כי המשפט נכון לכל גרף מישורי עם לכל היותר $n-1$ קדקודים, ונוכיח את נכונותו לגרף מישורי G שבו יש n קדקודים.

לפי משפט 5.2.34, יש בגרף G קדקוד x שדרגתו לכל היותר 5. נתבונן בגרף $G' = G\backslash\{x\}$ המתקבל מ- G על ידי השמטת הקדקוד x וכל הצלעות החלות בו. ברור שהגרף G' מישורי, וכן יש בו $n-1$ קדקודים. לכן לפי הנחת האינדוקציה אפשר לצבוע את G' ב- 6 צבעים. כעת נוסיף בחזרה את הקדקוד x והצלעות החלות בו. לקדקוד x יש לכל היותר 5 שכנים, ולנו יש 6 צבעים. לכן, ניתן לצבוע את x בצבע השונה מזה של 5 שכניו, ולקבל צביעה של הגרף ב- 6 צבעים. □

במאמץ נוסף ניתן לשפר את המשפט שזה עתה הוכחנו.

משפט 5.5.6: כל גרף מישורי הוא 5-צביע.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על המספר n של קדקודי הגרף.

בסיס האינדוקציה: עבור $n \le 5$ הטענה ברורה.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים מישוריים עם $n-1$ קדקודים, ונוכיח לגרף מישורי G עם $n > 5$ קדקודים. לפי משפט 5.2.34, יש ב- G קדקוד x שדרגתו לכל היותר 5. נתבונן בגרף $G' = G\backslash\{x\}$. ב- G' יש $n-1$ קדקודים ולכן לפי הנחת האינדוקציה אפשר לצבוע אותו ב- 5 צבעים. אם דרגתו של x קטנה ממש מ- 5 אז ניתן, כמו בהוכחה הקודמת, לצבוע אותו בצבע השונה מזה של שכניו ולקבל 5-צביעה של G.

ניתן להניח אם כן שדרגתו של x היא בדיוק 5. יהיו a,b,c,d,e שכניו של x, כשהם סדורים בסדר מעגלי סביב x (כאן אנחנו כבר משתמשים בעובדה ש- G מצויר במישור). על פי הנחת האינדוקציה קיימת כאמור 5-צביעה f של הגרף $G' = G\backslash\{x\}$. אם שניים משכניו של x צבועים באותו צבע על ידי f, אז שכניו של x צבועים לכל היותר ב- 4 צבעים, ושוב אפשר לצבוע את x בצבע השונה מזה של שכניו ולקבל 5-צביעה של G. נניח לכן ששכניו של x צבועים בחמישה צבעים שונים, ונניח שהצבעים הם $f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 3,\ f(d) = 4,\ f(e) = 5$ (ראו תרשים 5.5.2 למעלה מימין).

נביט בתת-גרף H של G הכולל את כל הקדקודים שצבעם הוא 1 או 3, ואת כל הצלעות בין הקדקודים הנ"ל. כמובן a,c קדקודים בגרף H. נניח תחילה שהקדקודים a,c שייכים לרכיבי קשירות שונים של H, ויהי A רכיב הקשירות של a בתת-גרף H (ראו תרשים 5.5.2 למעלה משמאל). נגדיר צביעה חדשה g המתלכדת עם f, למעט על הקדקודים ברכיב הקשירות A, שבו הצביעה g הפוכה מ- f. כלומר, לכל קדקוד $u \in A$ נגדיר:

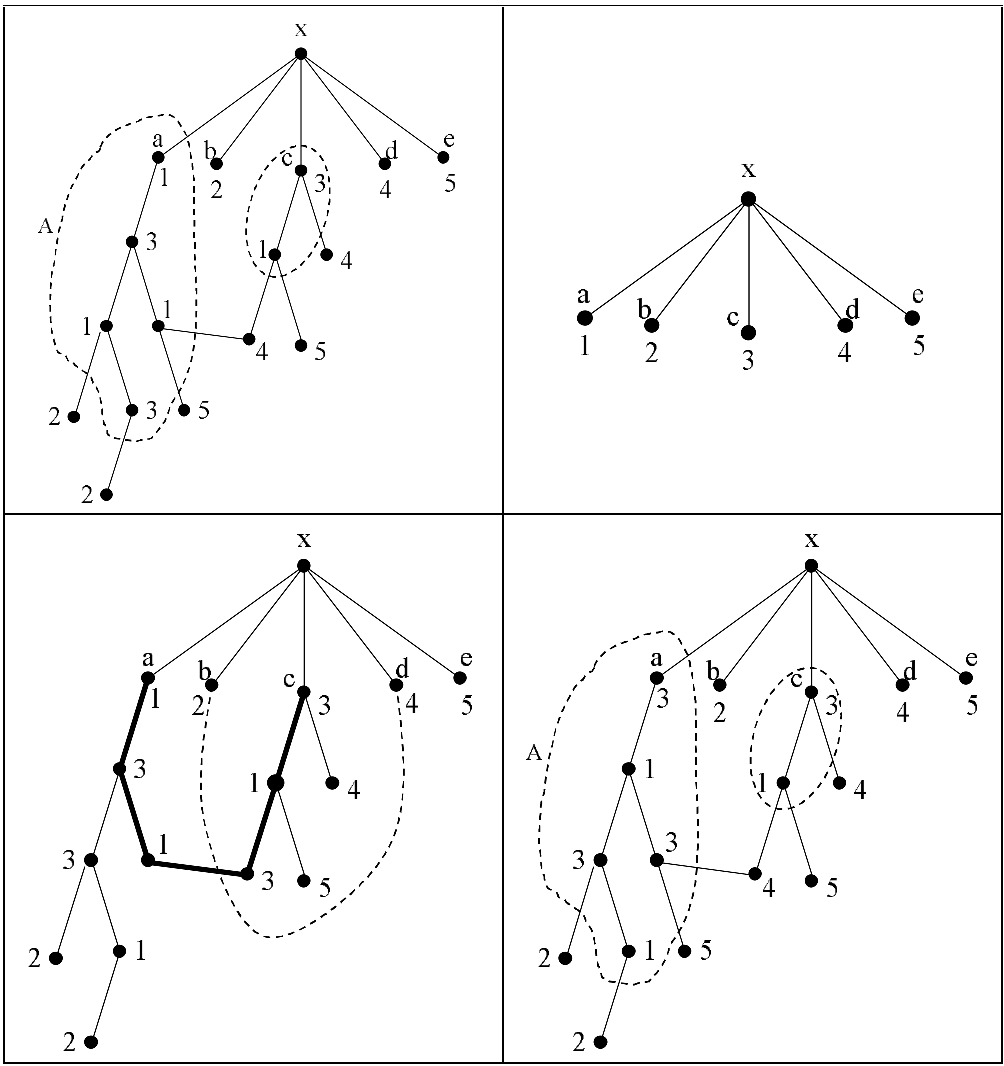
$$f(u) = 1 \Leftrightarrow g(u) = 3$$

$$f(u) = 3 \Leftrightarrow g(u) = 1$$

בפרט $g(a) = 3$ (ראו תרשים 5.5.2 למטה מימין). הפונקציה g היא 5-צביעה של $G' = G\backslash\{x\}$ שבה אף שכן של x אינו צבוע בצבע 1, ולכן ניתן לצבוע את x בצבע 1 ולקבל 5-צביעה של G כולו.

מעתה ואילך ניתן אם כן להניח ש- a,c באותו רכיב קשירות של H. משמע שיש ביניהם מסלול ב- H. בתרגום לגרף G פירוש הדבר שיש מסלול P_1 ב- G מ- a ל- c, כך שצבעי הקדקודים לאורכו על פי הצביעה f הם לסירוגין $1,3,1,3,\dots,3$ (ראו תרשים 5.5.2 למטה משמאל). עתה נפעיל אותו

טיעון עם הקדקודים b,d והצבעים 2,4. כמקודם אנו יכולים להניח כי יש מסלול P_2 ב- G מ- b ל- d כך שהקדקודים לאורכו צבועים לסירוגין 2,4,2,4,...,4. בגלל השוני בצבעים, המסלולים P_1,P_2 בהכרח זרים. אולם זה בלתי אפשרי בגרף מישורי, כי הקדקוד b נמצא בתוך התחום המוגדר על ידי המעגל x,P_1,x והקדקוד d נמצא מחוץ לו, או להיפך (ראו תרשים 5.5.2 למטה משמאל). ההנחות שלנו הובילו לסתירה, ולכן G 5-צביע. □



תרשים 5.5.2: תיאור הוכחת משפט 5.5.6.

למעלה מימין – שכניו של x צבועים ב- 5 צבעים שונים. **למעלה משמאל** – a,c שייכים לשני רכיבי קשירות שונים בתת-גרף H. **למטה מימין** – החלפה בין הצבעים 1 ל- 3 ברכיב הקשירות של a בתת-גרף H. לאחר ההחלפה ניתן לצבוע את x בצבע 1. **למטה משמאל** – a,c שייכים לאותו רכיב קשירות בתת-גרף H. המסלול P_1 מודגש, המסלול P_2 מקווקו. מקרה זה לא ייתכן.

למען השלמות יש להעיר שאף כי הטענה שטענו נכונה, הוכחה מלאה שלה, ובפרט ביסוס מלא של מושג ה"פנים" וה"חוץ" של מסלול מישורי סגור, דורשת טענות מטופולוגיה (משפט ז'ורדן). זו טענה מאוד אינטואיטיבית אך הוכחתה דורשת כלים מחוץ להיקפו של ספר זה.

תרגילים

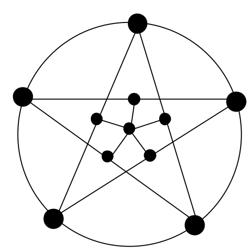
1. הוכיחו שכל עץ הוא גרף 2-צביע.

2. יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. נאמר ש- G **1-מנוון** אם בכל קבוצת קדקודים $S \subseteq V$ יש קדקוד $x \in S$ כך של- x יש לכל היותר שכן אחד ב- S. הוכיחו שהגרף G הוא 1-מנוון אם ורק אם G יער.

3. יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. נאמר ש- G **d-מנוון** אם בכל קבוצת קדקודים $S \subseteq V$ יש קדקוד $x \in S$ כך של- x יש לכל היותר d שכנים ב- S. הראו שכל גרף d-מנוון הוא (d+1)-צביע.

4. ניתן להגדיר גם צביעה צלעית של גרפים באופן הבא. אם $G = (V,E)$ הוא גרף, אז **k-צביעה צלעית** של G זו פונקציה $\varphi: E \to \{1,2,\ldots,k\}$ כך שאם לצלעות $e_1,e_2 \in E$ יש קדקוד משותף אז $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$ (כלומר, כל שתי צלעות שנפגשות צבועות בצבעים שונים). **אינדקס הצביעה** (או מספר הצביעה הצלעי) של הגרף G הוא ה- k המזערי כך שלגרף G יש k-צביעה צלעית. אינדקס הצביעה יסומן על ידי $\chi'(G)$.
תהי Δ הדרגה המקסימלית בגרף G. הוכיחו כי: $2\Delta - 1 \geq \chi'(G) \geq \Delta$.
הערה: משפט של וויזינג Vizing מראה שאפילו $\Delta + 1 \geq \chi'(G)$. עוד על נושא זה ראו תרגיל 1 בסעיף 5.4 העוסק בזיווגים.

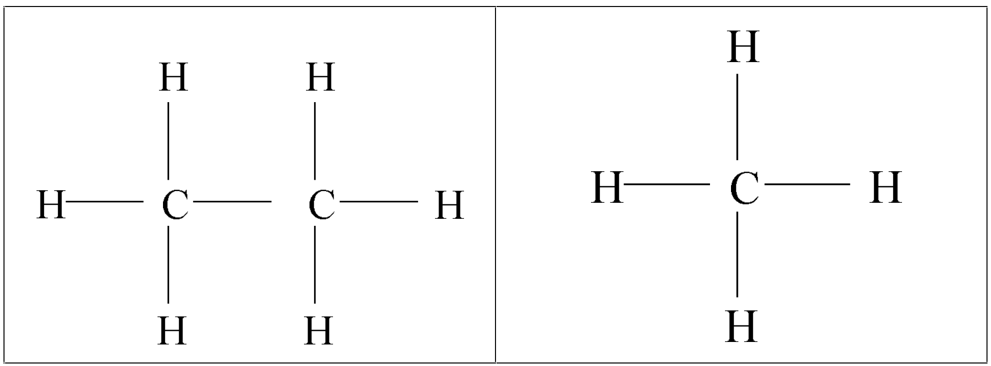
5. א. הוכיחו שאם הגרף G מכיל קליקה בת k קדקודים אז $\chi(G) \geq k$.
ב. להלן בנייה המראה שהאי-שוויון בסעיף א' יכול להיות אי-שוויון ממש (למען האמת ייתכנו פערים גדולים כרצוננו בין מספר הצביעה לבין הגודל המירבי של קליקה בגרף). מדובר בגרף חסר משולשים שמספר הצביעה שלו הוא 4. הוכיחו שהגרף הזה הנקרא גרף מיצ'יילסקי, אכן אינו 3-צביע ומצאו לו 4-צביעה.



5.6. מניה של גרפים

הנושאים שיוצגו: *מניה של עצים מתויגים (משפט קיילי Cayley), מניה של עצים לא-מתויגים, גרפים איזומורפיים, מניה של עצים לא-מתויגים מישוריים עם שורש.*

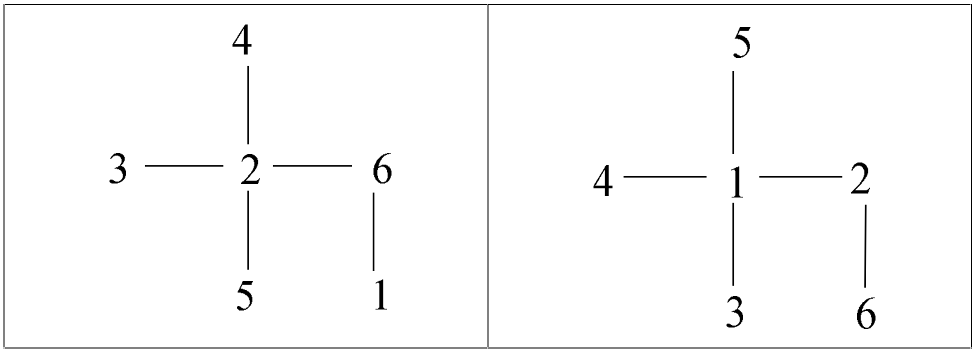
בפרק 4 עסקנו באינטנסיביות בבעיות מניה. ענף נוסף של בעיות מניה עוסק במניית סוגים שונים של גרפים. בין אבות השטח ניתן למנות את קיילי שהתעניינותו בבעיה החלה משאלה בכימיה. הוא היה מעונין בקטלוג מלא של המולקולות הבנויות רק ממימן ופחמן. בתרשים 5.6.1, אפשר לראות שתי מולקולות כאלה. כפי שרואים בתרשים זה, למולקולות האלה מבנה גרפי של עץ. הבעיה שפתר קיילי, שאת פתרונה נביא להלן, היא: כמה עצים בעלי n קדקודים יש? שאלות אחרות אופייניות בתחום זה (חלקן עדיין לא באו על פתרונן המלא) הן: כמה גרפים מישוריים יש בעלי n קדקודים? כמה גרפים d-רגולריים יש בעלי n קדקודים? וכדומה. בפרק זה נשתמש בכלים מתחום הקומבינטוריקה ובתכונות של גרפים שלמדנו עד כה כדי לענות על כמה משאלות אלה.



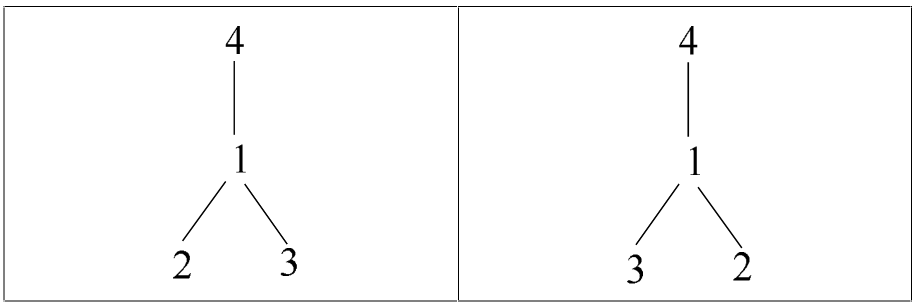
תרשים 5.6.1: מימין מולקולת מתאן ומשמאל מולקולת בוטאן.

עצים מתויגים

נפנה אם כן למניה של עצים. אנו נתעניין בעצים מתויגים שלקדקודיהם ניתנו השמות $\{1,2,\dots,n\}$. **גרף מתויג** באופן כללי מוגדר על ידי רשימת הצלעות המתויגות שלו. כך למשל נחשוב על העצים בתרשים 5.6.2 כעל עצים שונים, מפני שלמשל הצלע $\{1,5\}$ נמצאת בעץ הימני אך לא בעץ השמאלי. לעומת זאת העצים בתרשים 5.6.3 זהים, מפני שלשניהם אותה רשימת צלעות, היינו: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$. (עוד בעניין זה תוכלו לקרוא בהמשך כשנדון בעצים לא מתויגים).



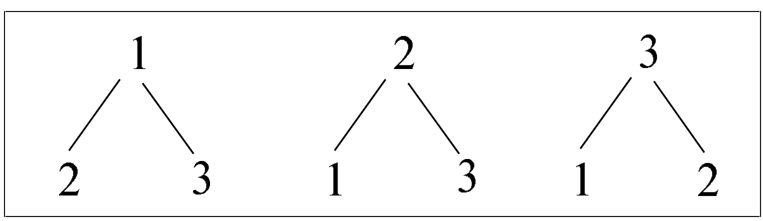
תרשים 5.6.2: שני עצים מתויגים שונים בעלי 6 קדקודים.



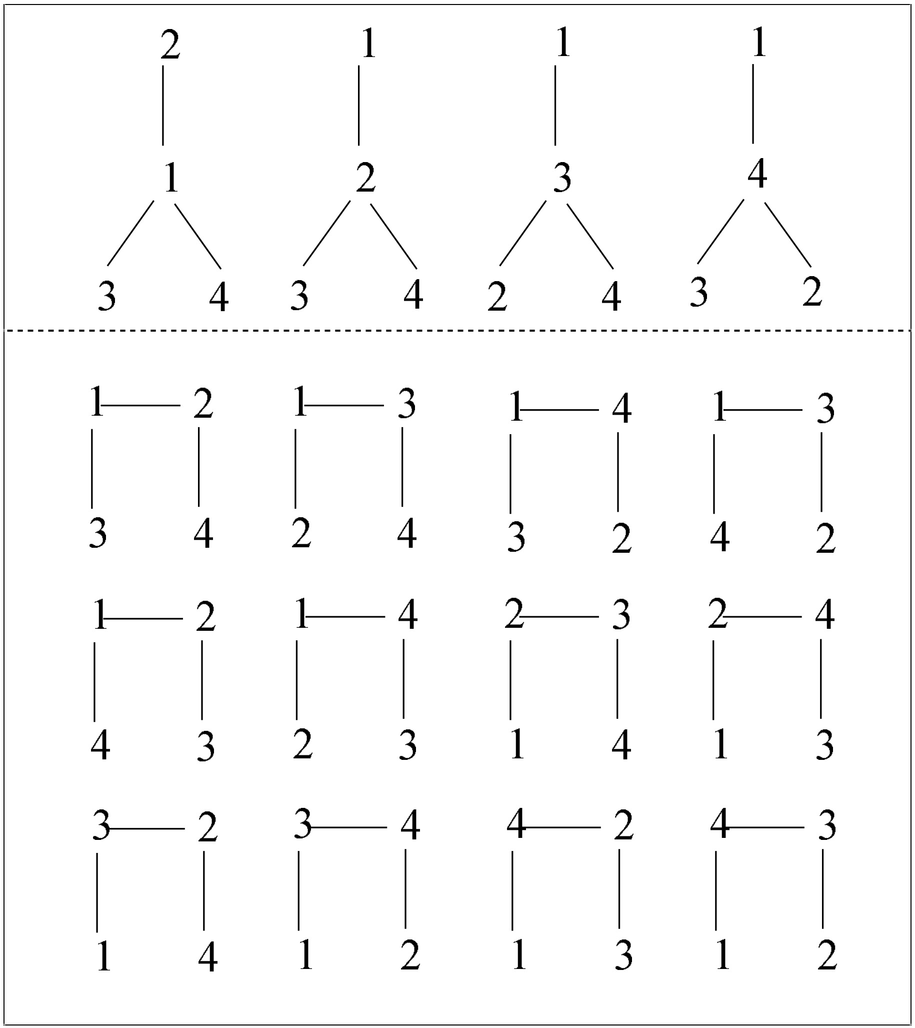
תרשים 5.6.3: שני עצים מתויגים זהים בעלי 4 קדקודים.

משפט 5.6.1 (Cayley): מספר העצים המתויגים בעלי n קדקודים הוא n^{n-2}.

בטרם ניגש להוכחת המשפט נראה מספר דוגמאות לערכים נמוכים של n. עבור $n = 2$ יש רק עץ אחד בעל הצלע $\{1,2\}$. עבור $n = 3$ יש שלושה עצים כפי שאפשר לראות בתרשים 5.6.4, ואכן $3 = 3^{3-2}$. עבור $n = 4$ יש כבר $4^{4-2} = 16$ עצים שונים, שניתן לחלקם לעצים בעלי שתי צורות שונות, כפי שמראה תרשים 5.6.5.



תרשים 5.6.4: שלושה עצים מתויגים שונים בעלי 3 קדקודים.



תרשים 5.6.5: 16 העצים המתויגים בעלי 4 קדקודים.

אנו ניתן הוכחה אחת מלאה למשפט קיילי ונסקור את עיקריה של הוכחה נוספת.

הוכחה ראשונה למשפט 5.6.1: הוכחת המשפט מסתמכת על חלוקה מפורטת יותר של העצים המתויגים בעלי n קדקודים. אנו נמיין את העצים על פי הדרגות של הקדקודים השונים. נפרק את פתרון הבעיה לשתי שאלות:

א. בהינתן סדרה $d_1,d_2,\ldots,d_n$ של מספרים טבעיים, מהו התנאי לכך שיש עץ שזוהי סדרת הדרגות שלו, כאשר d_i היא הדרגה של הקדקוד i?

ב. מהו מספר העצים המתויגים שזו סדרת הדרגות שלהם?

שתי הטענות שלהלן עונות על שאלות אלה.

טענה 5.6.2: יש עץ בעל n קדקודים שסדרת הדרגות שלו היא $d_1,\ldots,d_n$ אם ורק אם $d_i \ge 1$ לכל i, וכן $d_1+\ldots+d_n = 2n-2$.

הוכחה: התנאי כמובן הכרחי, שכן כל הדרגות בעץ ≥ 1 כי אין בעץ קדקודים מבודדים (מדרגה 0). כמו-כן סכום הדרגות בכל גרף שווה לפעמיים מספר הצלעות בגרף (משפט 5.1.5), כלומר $d_1+\ldots+d_n = 2|E|$, ובעץ בעל n קדקודים יש כזכור $n-1$ צלעות (משפט 5.2.19).

התנאי מספיק: נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n = 2$ הטענה ברורה.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $n-1$ ונוכיח ל- $n > 2$. מכיוון ש- $d_1+\ldots+d_n = 2n-2$ אז הדרגה הממוצעת מקיימת:

$$\frac{d_1+\ldots+d_n}{n} = \frac{2n-2}{n} < 2.$$

לכן, יש דרגה כלשהי שאינה עולה על הממוצע. מכיוון שכל הדרגות חיוביות, חייבת להיות דרגה אחת, נניח d_1, השווה ל- 1.

כמו-כן, אם $n \ge 3$ אז יש בהכרח גם דרגה הגדולה מ- 1. אחרת, אם כל הדרגות שוות ל- 1 אז $d_1+\ldots+d_n = n < 2n-2$ כי $n \ge 3$, וזו סתירה. נניח לכן ש- $d_2 > 1$.

נביט בסדרת הדרגות הבאה (מאורך $n-1$): $d_2-1,d_3,d_4,\ldots,d_n$. זו סדרה המקיימת את תנאי הטענה לעצים בעלי $n-1$ קדקודים. לכן, על פי הנחת האינדוקציה יש עץ מתויג שקדקודיו הם $2,3,\ldots,n$ וזו סדרת הדרגות שלו. נצרף לעץ הזה עוד קדקוד שתיוגו 1 ואת הצלע $\{1,2\}$. הגרף המתקבל אף הוא עץ (ראו תרגיל 4 בסעיף 5.2). □

טענה 5.6.3: מספר העצים המתויגים בעלי n קדקודים, $n \ge 2$, שסדרת הדרגות שלהם היא $d_1,\ldots,d_n$, שווה למקדם המולטינומי

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1,\ldots,d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n = 2$ הטענה ברורה. יש רק עץ אחד.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $n-1$ ונוכיח ל- $n > 2$. כזכור, בכל עץ יש עלה (משפט 5.2.18). נניח שזהו הקדקוד n. לכן דרגתו של n היא 1, כלומר $d_n = 1$. יהי j השכן של n בעץ. נשמיט מהעץ את העלה n ואת הצלע שחלה בו. נישאר עם עץ בעל $n-1$ קדקודים שסדרת הדרגות שלו היא $d_1,\ldots,d_{j-1},d_j-1,d_{j+1},\ldots,d_{n-1}$. על פי הנחת האינדוקציה מספר העצים האלה הוא:

$$\binom{n-3}{d_1-1,\ldots,d_{j-1}-1, d_j-2, d_{j+1}-1,\ldots,d_{n-1}-1}$$

אולם n יכול להיות שכן של כל אחד מ- $(n-1)$ הקדקודים שנותרו (כלומר $1 \le j \le n-1$). ולכן, מספר העצים המתויגים בעלי n קדקודים הוא:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-3}{d_1-1,\ldots,d_{j-1}-1,d_j-2,d_{j+1}-1,\ldots,d_{n-1}-1}=\binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1}$$

כאשר השוויון האחרון נכון על פי זהות פסקל למקדמים המולטינומיים (משפט 4.7.7). כדי להשלים את ההוכחה נשים לב ש- $d_n-1=0$, ומכאן:

$$\binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1}=\binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1,d_n-1}.$$

כמו-כן, ספרנו בדיוק פעם אחת כל עץ בעל סדרת הדרגות $d_1,\ldots,d_n$, מפני ש- $d_n=1$ מחייב שהקדקוד n הוא עלה ויש לו בדיוק שכן אחד. □

משפט 5.6.1 נובע ישירות משתי הטענות שהוכחנו זה עתה ומהטענה הבאה.

טענה 5.6.4: $\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_n\geq 1\\ d_1+\ldots+d_n=2n-2}}\binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_{n-1}-1,d_n-1}=n^{n-2}$.

הוכחה: נשתמש בנוסחת הבינום המוכללת של ניוטון (משפט 4.7.6):

$$\begin{aligned}n^{n-2}&=(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n})^{n-2}\\&=\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n\geq 0\\ j_1+\ldots+j_n=n-2}}\binom{n-2}{j_1,j_2,\ldots,j_n}1^{j_1}1^{j_2}\cdots1^{j_n}\\&=\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_n\geq 1\\ d_1+\ldots+d_n=2n-2}}\binom{n-2}{d_1-1,d_2-1,\ldots,d_n-1}\end{aligned}$$

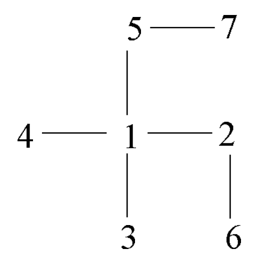
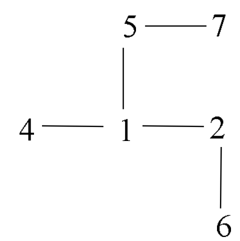
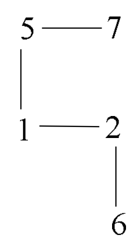
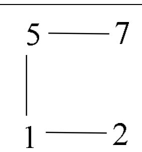
השוויון האחרון מתקבל מההצבה של $d_i=j_i+1$ לכל $1\leq i\leq n$. □

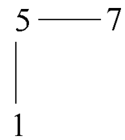
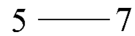
נדון כעת בהוכחה נוספת למשפט 5.6.1 של קיילי. הוכחה זו ניתנה על ידי Prüfer.

הוכחה שנייה (חלקית) למשפט 5.6.1: נראה התאמה חח"ע ועל f בין קבוצת העצים המתויגים בעלי n קדקודים לבין סדרות $(a_1,a_2,\ldots,a_{n-2})$ באורך $n-2$ של מספרים מהתחום $\{1,2,\ldots,n\}$. מכיוון שמספר הסדרות האלה הוא n^{n-2}, הרי שזהו גם מספר העצים המתויגים בעלי n קדקודים. אנו לא נפתח את הבנייה הזאת במלואה ובפרט לא נספק הוכחה לתקפותה.
תחילה נראה כיצד להתאים לעץ מתויג נתון T סדרה $f(T)=(a_1,a_2,\ldots,a_{n-2})$ אחת ויחידה כנ"ל. יהי u_1 העלה שמספרו הנמוך ביותר מבין כל העלים ב- T, ויהי a_1 מספרו של השכן (היחידי) של u_1 בעץ. יהי $T_1=T\setminus\{u_1\}$ העץ שנותר לאחר הורדת u_1. ב- T_1 יש $n-1$ קדקודים. נחזור על אותה

הפעולה. בצעד הבא אנו נשמיט את העלה בעל המספר המינימלי u_2 בעץ T_1, ונגדיר את a_2 כמספרו של השכן של u_2 ב- T_1. יהי $T_2 = T_1 \setminus \{u_2\}$. נמשיך באותה סדרה של פעולות עד שנישאר עם עץ T_{n-2} בעל 2 קדקודים (צלע). הסדרה $f(T)$ שנתאים לעץ T תהיה הסדרה $(a_1,a_2,\ldots,a_{n-2})$ שהגדרנו במהלך התהליך.

דוגמה 5.6.5: נתבונן בעץ שבתרשים 5.6.6 למעלה . נוריד תחילה את העלה $u_1 = 3$, ונגדיר לכן $a_1 = 1$. אח״כ נוריד את $u_2 = 4$ ונגדיר $a_2 = 1$. נמשיך כך ונקבל $u_3 = 6$ ואילו $a_3 = 2$ וכך הלאה. הסדרה הסופית המתקבלת היא $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (1,1,2,1,5)$.

העלה u_i שנבחר והגדרת a_i	**העץ המתויג הנוכחי**
$u_1 = 3,\ a_1 = 1$	
$u_2 = 4,\ a_2 = 1$	
$u_3 = 6,\ a_3 = 2$	
$u_4 = 2,\ a_4 = 1$	

$u_5 = 1,\ a_5 = 5$	
התהליך הסתיים	

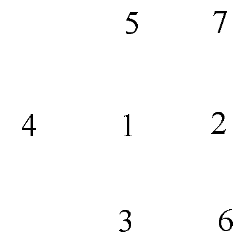
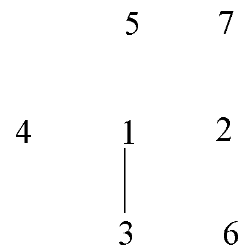
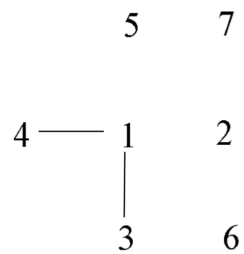
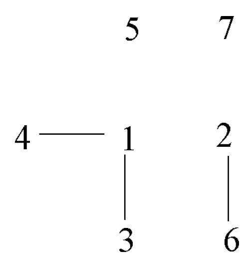
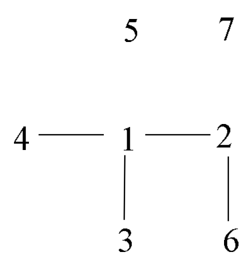
תרשים 5.6.6: תהליך התאמת סדרה לעץ.

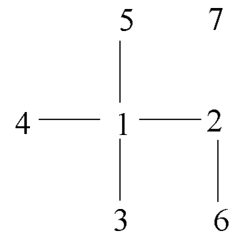
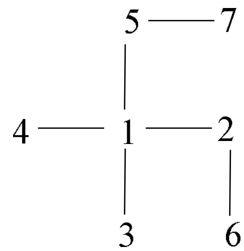
ברור שההעתקה f מתאימה לכל עץ מתויג סדרה כדרוש. מדוע זו התאמה חח״ע ועל? על מנת להוכיח זאת נמצא העתקה הופכית g המתאימה עץ מתויג לכל סדרה $(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$ של מספרים מהתחום $\{1,2,\dots,n\}$. יהיה עלינו להוכיח כי g הופכית ל- f. מזה ינבע כמובן ש- f חח״ע ועל (משפט 1.4.13). כלומר, נראה שאם יוצאים מעץ מתויג T ובונים ממנו את הסדרה $f(T) = (a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$, אזי $g(a_1,a_2,\dots,a_{n-2}) = T$.
כיצד נבנה את הפונקציה g האמורה להיות הפונקציה ההופכית של f? נניח כי T הוא עץ מתויג והפונקציה f התאימה לו את הסדרה $f(T) = (a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$. מהו המספר של העלה הראשון u_1 שהושמט בתהליך הבנייה של הסדרה $(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$ מתוך T? ודאי שהמספר u_1 אינו מופיע בסדרה $(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$. יתר על כן, u_1 הוא המספר הטבעי הקטן ביותר שאינו נמצא בסדרה הנ״ל. זה מוביל אותנו לתהליך הבא של בניית עץ מתוך סדרה נתונה $(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$.
נרשום לפנינו את הסדרה $A = (a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$ וכן את הקבוצה $B = \{1,2,\dots,n\}$. אנו נבנה יער של עצים שהולכים וגדלים, ובסופו של דבר הופכים לעץ אחד $g(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$. במהלך הבנייה הסדרה A והקבוצה B יילכו ויצטמצמו. הנה תהליך הבנייה של העץ:

- **אתחול:** היער כולל את n הקדקודים $1,2,\dots,n$ ללא צלעות ביניהם.
- **צעד ראשון:** יהי u_1 האיבר הקטן ביותר בקבוצה B שאינו שייך לסדרה A. נוסיף את הצלע $\{a_1,u_1\}$ ליער, נשמיט את a_1 מ- A ואת u_1 מ- B.
- **באופן כללי, הצעד ה- i, $1 \le i \le n-2$:** יהי u_i האיבר הקטן ביותר בקבוצה הנוכחית B שאיננו שייך לסדרה הנוכחית A. יהי a_i האיבר הראשון בסדרה הנוכחית A. נוסיף את הצלע $\{a_i,u_i\}$ ליער, נשמיט את a_i מ- A ואת u_i מ- B.
- **צעד הסיום:** הסדרה A התרוקנה, ואילו בקבוצה B נותרו שני איברים x,y. נוסיף את הצלע $\{x,y\}$ ליער.

קל לראות שתהליך זה בונה גרף עם הקדקודים $1,2,\dots,n$ ועם $(n-1)$ צלעות. כאמור, לא נוכיח פורמלית ש- f ו- g הופכיות. אולם כדי להדגים את הבנייה נתבונן בדוגמה הבאה המשחזרת את העץ המתויג שבתרשים 5.6.6 מתוך הסדרה שהותאמה לו. □

דוגמה 5.6.6: נשחזר את העץ מתוך הסדרה $(1,1,2,1,5)$. תרשים 5.6.7 מדגים את התהליך של שחזור העץ.

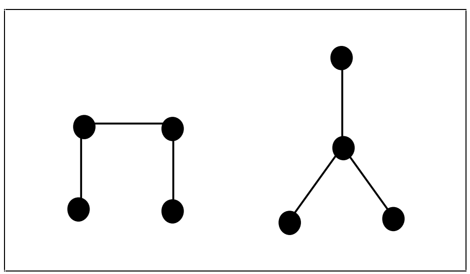
הסדרה A והקבוצה B	**יער העצים המתויגים**
$A = (1,1,2,1,5)$ $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $u_1 = 3,\ a_1 = 1$	
$A = (1,2,1,5)$ $B = \{1,2,4,5,6,7\}$ $u_2 = 4,\ a_2 = 1$	
$A = (2,1,5)$ $B = \{1,2,5,6,7\}$ $u_3 = 6,\ a_3 = 2$	
$A = (1,5)$ $B = \{1,2,5,7\}$ $u_4 = 2,\ a_4 = 1$	
$A = (5)$ $B = \{1,5,7\}$ $u_5 = 1,\ a_5 = 5$	

$A = \emptyset$ $B = \{5,7\}$ נוסיף את הצלע $\{5,7\}$.	
התהליך הסתיים.	

תרשים 5.6.7: התהליך של שחזור העץ מתוך הסדרה.

עצים לא מתויגים

מלבד עצים מתויגים שזה עתה מנינו, מעניין גם לברר מהו מספרם של העצים הלא מתויגים. למשל, יש $3^{3-2} = 3$ עצים מתויגים מסדר 3 כפי שראינו בתרשים 5.6.4, ו- $4^{4-2} = 16$ עצים מתויגים מסדר 4 (תרשים 5.6.5). מאידך, מספר העצים הלא מתויגים מסדר 3 הוא **1**, ומסדר **4** המספר הוא 2, כפי שאפשר לראות בתרשים 5.6.8.



תרשים 5.6.8: עצים לא-מתויגים מסדר 4.

מדוע אלה העצים הלא מתויגים היחידים? כדי להגדיר פורמלית מתי שני עצים לא מתויגים ייחשבו שונים זה מזה, נתבונן תחילה בהגדרה הבאה שעוסקת בעצים מתויגים.
אנו אומרים ששני גרפים מתויגים הם איזומורפיים אם ניתן לעבור מהאחד לשני על ידי שינוי במספור הקדקודים. פורמלית, אפשר להגדיר זאת כך:

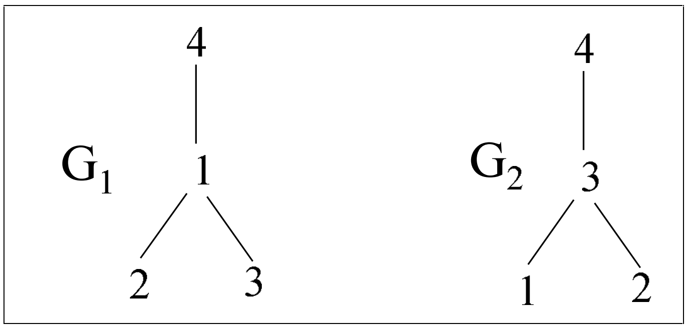
הגדרה 5.6.7: יהיו $G_1 = (V_1,E_1)$ ו- $G_2 = (V_2,E_2)$ שני גרפים לא-מכוונים. נאמר ש- G_1,G_2 **איזומורפיים** אם ישנה פונקציה חח"ע ועל $f:V_1\to V_2$ כך ש- $\{x,y\}\in E_1$ אם ורק אם $\{f(x),f(y)\}\in E_2$.

במילים פשוטות, שני הגרפים שונים זה מזה רק **בשמות** שנתנו לקדקודים.

דוגמה 5.6.8: שני העצים שבתרשים 5.6.9 איזומורפיים כפי שמוכיחה הפונקציה $f:V_1\to V_2$ הבאה:

$f(1) = 3,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 4$.

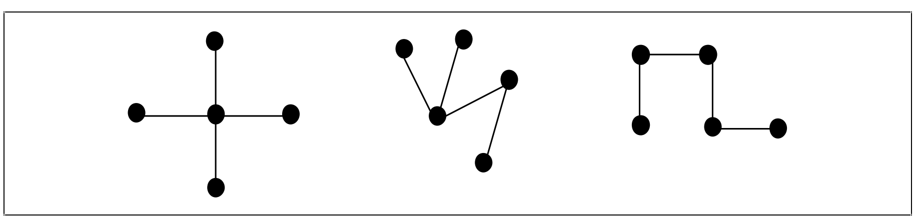
רשימת הצלעות בגרף G_1 היא $\{1,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, ואילו הצלעות ב- G_2 הן $\{f(1), f(4)\} = \{3,4\}$, $\{f(1), f(2)\} = \{3,1\}$, $\{f(1), f(3)\} = \{3,2\}$.



תרשים 5.6.9: שני עצים מתויגים איזומורפיים.

קל לראות שאיזומורפיזם הוא יחס שקילות בין גרפים מתויגים. ואכן נחזור ונביט ב- 16 העצים המתויגים מסדר 4 שבתרשים 5.6.5, ונקבץ אותם למחלקות שקילות של עצים מתויגים איזומורפיים. מתקבלות בדיוק שתי מחלקות שקילות, האחת כוללת את 12 העצים בצורת האות "חית", והשנייה את 4 העצים בצורת מזלג. לכל מחלקת שקילות כזאת אנו קוראים עץ לא מתויג אחד. ואכן, יש בדיוק שני עצים לא מתויגים מסדר 4 כפי שראינו בתרשים 5.6.8.

נסמן את מספר העצים הלא מתויגים בעלי n קדקודים ב- U_n. ראינו כבר ש- $U_1 = U_2 = U_3 = 1$ ואילו $U_4 = 2$. קל לבדוק ש- $U_5 = 3$ כפי שניתן לראות בתרשים 5.6.10.



תרשים 5.6.10 : כל העצים הלא מתויגים השונים בעלי 5 קדקודים.

בניגוד לבעיית המנייה של עצים מתויגים, אין נוסחה מפורשת ופשוטה למספר העצים הלא מתויגים U_n. יחד עם זאת נוכל להוכיח **חסמים עליונים ותחתונים** מהצורה $A^n < U_n < B^n$, כאשר A,B מספרים ממשיים חיוביים (בהמשך הספר, בפרק 7, נאמר במצב כזה כי לסדרה U_n יש קצב גידול מעריכי ב- n).

משפט 5.6.9: לכל $A < e$ ולכל n מספיק גדול מתקיים $A^n < U_n < 4^n$.
הערה: החסם העליון מתקיים בעצם לכל n טבעי.

הוכחת החסם התחתון: נסמן ב- T_n את מספר העצים המתויגים בעלי n קדקודים. כזכור לפי נוסחת קיילי (משפט 5.6.1) מתקיים $T_n = n^{n-2}$. אנו נראה כי:

$$U_n \geq \frac{T_n}{n!}.$$

ואכן, נקבץ כמקודם את כל n^{n-2} העצים המתויגים למחלקות האיזומורפיזם שלהם. בכל מחלקה כזו יש לכל היותר $n!$ עצים מתויגים, מפני שהם מתקבלים זה מזה על ידי שינוי שמות הקדקודים. מכאן מתקבל האי-שוויון. על ידי שימוש בהערכות של $n!$ (ראו משפט 7.2.15), אפשר לחסום את $n!$ על ידי:

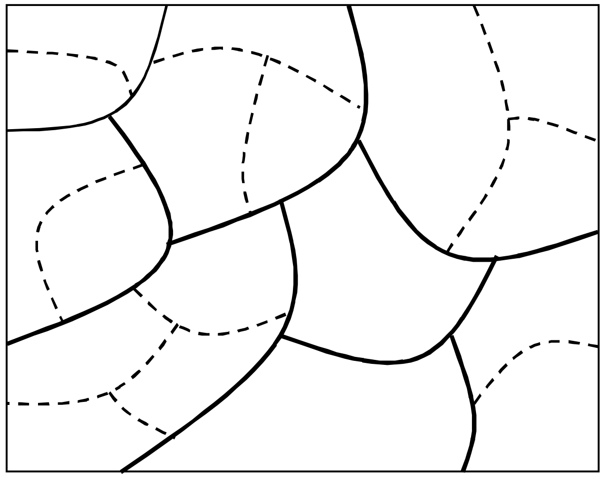
$$n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{1/(12n)}$$

ולכן,

$$U_n \geq \frac{n^{n-2}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{1/(12n)}} = \frac{e^{n-\frac{1}{12n}}}{n^2\sqrt{2\pi n}}.$$

לכן אם A מספר כלשהו המקיים $A < e$, אז $U_n > A^n$ לכל n מספיק גדול.

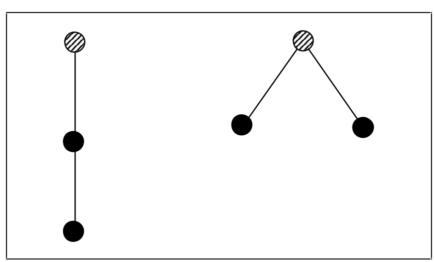
הוכחת החסם העליון: כפי שראינו, המספר הכולל של עצים מתויגים מסדר n הוא n^{n-2}. הגדרנו גם את יחס השקילות של איזומורפיזם, וברצוננו למנות את מספר מחלקות השקילות (השווה למספר העצים הלא-מתויגים U_n). על מנת לקבל חסם עליון על U_n, נגדיר יחס שקילות אחר (או חלוקה אחרת, ראו סעיף 1.3 הדן ביחסי שקילות) על אוסף העצים המתויגים. יחס זה יהיה **מעודן** יותר מן היחס "איזומורפי", ויוגדר באמצעים גיאומטריים הנגזרים מהציור של עצים במישור. מספר מחלקות השקילות ביחס החדש המעודן יהיה גדול או שווה למספר מחלקות השקילות ביחס האיזומורפיזם, ולכן יוכל לשמש כחסם עליון למספר זה. ראו תרשים 5.6.11.



תרשים 5.6.11: חלוקה והעידון שלה. מחלקות השקילות של יחס האיזומורפיזם בקווים רצופים, ומחלקות השקילות של היחס המעודן בקווים מקווקווים.

בטרם ניכנס לדיון מפורט בעניין זה, מומלץ להשוות בין תרשים 5.6.5 לתרשים 5.6.14 שבהמשך. בתרשים 5.6.5 מופיעים כל $4^2 = 16$ העצים המתויגים מסדר 4. הקו המקווקו המאוזן מפריד את העצים האלה לשתי מחלקות האיזומורפיזם שלהם, ואכן $U_4 = 2$ כפי שראינו. לעומת זאת, בתרשים 5.6.14 חילקנו את 16 העצים ל- 5 מחלקות על פי כלל שנתאר להלן. בזה מוכח כי $U_4 < 5$. מכיוון שמטרתנו עתה היא למצוא חסם עליון על U_n, הבנייה הזאת תואמת את מטרתנו. שימו לב שהחלוקה בתרשים 5.6.14 **מעדנת** את החלוקה בתרשים 5.6.5. למשל, 4 העצים דמוי המזלג שהם מחלקה אחת בתרשים 5.6.5, פוצלו בתרשים 5.6.14 לשתי מחלקות בנות 1 ו- 3 עצים. המחלקה השנייה בת 12 עצים דמוי האות "חית" בתרשים 5.6.5, פוצלה לשלוש מחלקות בנות 3, 3, ו- 6 עצים בתרשים 5.6.14. בנוגע לעידונים של חלוקות ראו גם תרגיל 9 בסעיף 1.6.

ניגש אם כן להסביר מהי החלוקה **המעודנת** יותר של עצים. ראשית נצייד כל עץ **בשורש**. שנית, נצייר אותו במישור. כך למשל, יש שני עצים מישוריים לא מתויגים עם שורש שכוללים 3 קדקודים, כפי שאפשר לראות בתרשים 5.6.12. שימו לב, אילו היינו סופרים עצים לא מתויגים ללא שורש, אז שני העצים האלה היו נחשבים לעץ אחד.



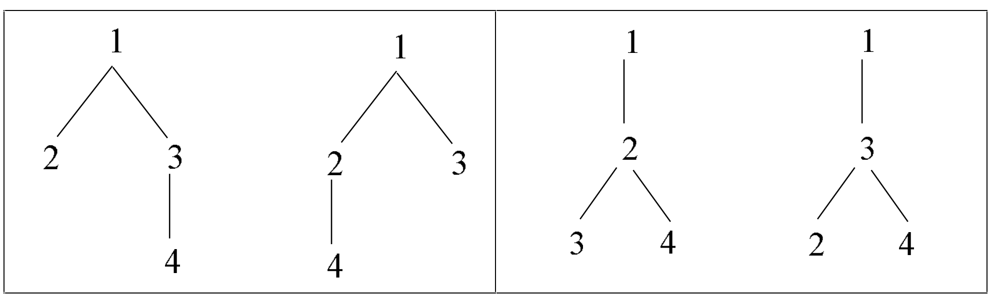
תרשים 5.6.12: עצים מישוריים לא-מתויגים עם שורש מסדר 3. השורש מקווקו.

קל להבין אינטואיטיבית מתי שני עצים מישוריים מתויגים בעלי שורש נחשבים לשקולים, אולם כיצד נגדיר זאת באופן פורמלי? נמשיך עוד לרגע בדיון האינטואיטיבי. בהינתן עץ מתויג עם שורש, נצייר אותו במישור כך: השורש למעלה וכל קדקוד נמצא מעל לילדיו. את הילדים נסדר משמאל לימין על פי סדר עולה של התוויות שלהם. שני עצים הם שקולים אם כאשר מציירים אותם על פי הכללים האלה, הם "נראים אותו הדבר". כך למשל שני העצים בתרשים 5.6.13 מימין שקולים, ואילו שני העצים בתרשים זה משמאל אינם שקולים.

פורמלית, יהיו T_1,T_2 שני עצים מתויגים בעלי n קדקודים, כאשר $V_1 = \{1,\dots,n\}$ היא קבוצת הקדקודים של T_1 ו- $V_2 = \{1,\dots,n\}$ קבוצת הקדקודים של T_2. אנו נתייחס לאיברי V_1 ו- V_2 הן כקדקודים והן כמספרים טבעיים. יהיו r_1 השורש של T_1 ו- r_2 השורש של T_2. אנו נאמר שהעצים T_1,T_2 **שקולים** כעצים מישוריים בעלי שורש, אם יש פונקציה חח"ע ועל $g : V_1 \to V_2$ המקיימת את הדרישות הבאות:

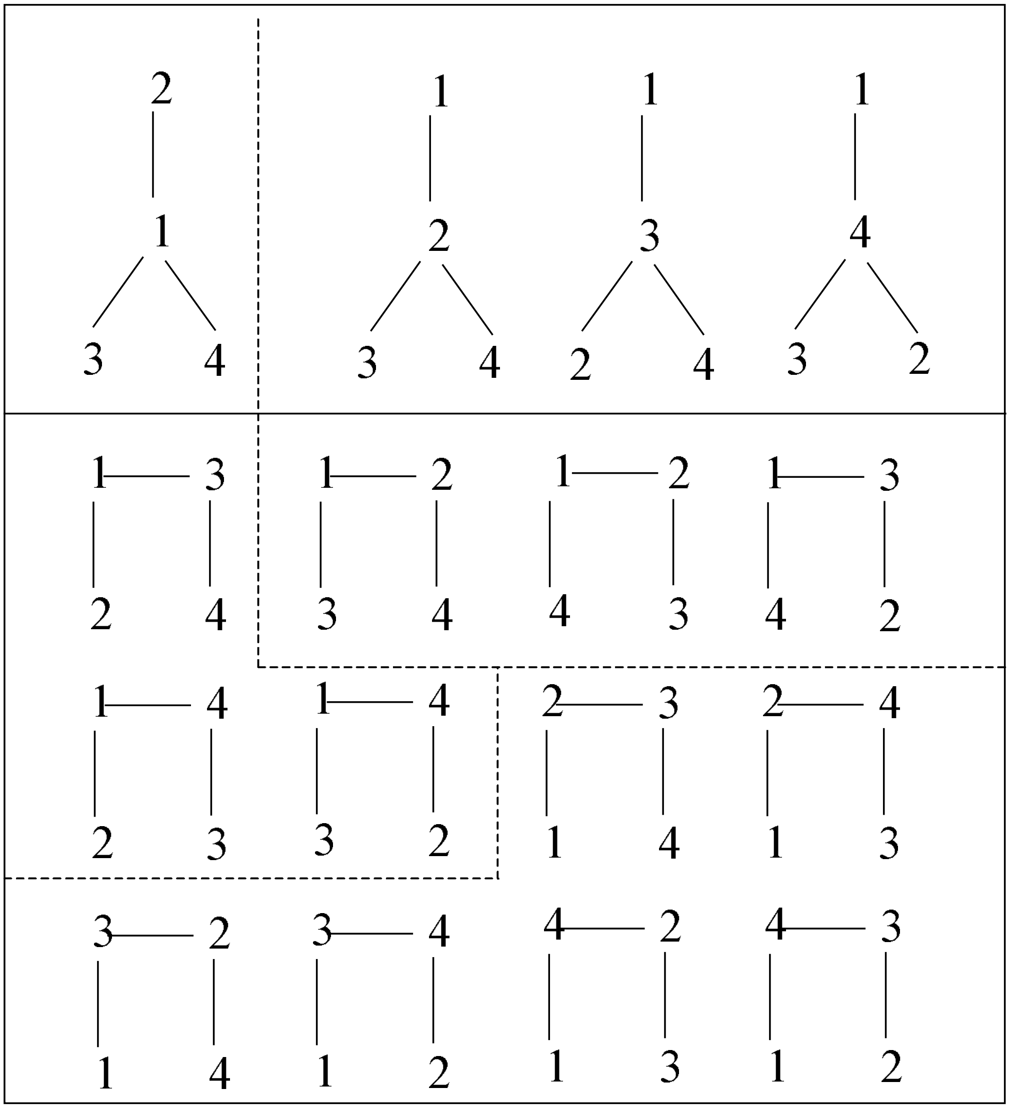
1. $g(r_1) = r_2$, כלומר השורש נשמר על ידי g.
2. הקדקוד $g(x)$ הוא ההורה של הקדקוד $g(y)$ בעץ T_2 אם ורק אם x הוא ההורה של y בעץ T_1. כלומר, ההעתקה g שומרת על יחס ההורות.
3. אם y_1,y_2 ילדים של x בעץ T_1 ואם $y_1 < y_2$ (כלומר y_1 נמצא משמאל ל- y_2 בציור של T_1), אז גם $g(y_1) < g(y_2)$ (הסדר משמאל לימין נשמר על ידי הפונקציה g).

דוגמה 5.6.10: שני העצים בתרשים 5.6.13 מימין שקולים, כפי שמוכיחה הפונקציה הבאה: $g(1) = 1,\ g(2) = 3,\ g(3) = 2,\ g(4) = 4$. ואכן 3 הוא ילד של 2 בעץ השמאלי, וגם $g(3)$ הוא ילד של $g(2)$ בעץ מימין. כמו-כן, 3 הוא אח שמאלי של 4 בעץ שמשמאל, וגם $g(3) = 2$ אח שמאלי של $g(4) = 4$ בעץ שמימין. יש כמובן לבדוק שכל יתר היחסים "ילד של" ו"אח ימני/שמאלי של" נשמרים בין כל הקדקודים המתאימים, וכמובן שהשורש נשמר על ידי ההעתקה g.
לעומת זאת שני העצים בתרשים 5.6.13 משמאל אינם שקולים. הוכיחו זאת!



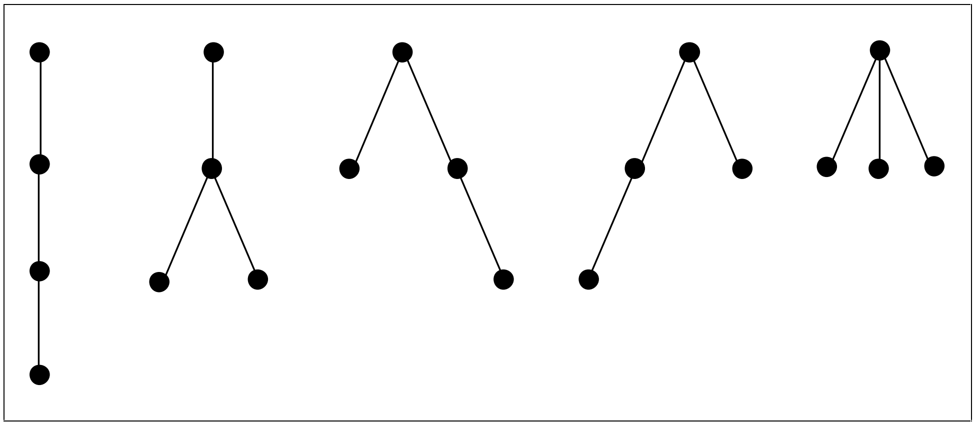
תרשים 5.6.13: מימין, שני עצים מתויגים שקולים בחלוקה המעודנת. משמאל, העצים אינם שקולים. הקדקוד 1 הוא השורש.

דוגמה 5.6.11: נבדוק למשל מהו מספר העצים המישוריים בעלי שורש כש- $n = 4$. כזכור יש $4^{4-2} = 16$ עצים מתויגים עם 4 קדקודים. בתרשים 5.6.14 אפשר לראות את החלוקה שלהם למחלקות שקילות של עצים מישוריים בעלי שורש. בכל העצים הללו השורש הוא הקדקוד המסומן ב- 1.



תרשים 5.6.14: מחלקות השקילות של העצים המתויגים מסדר 4.
בכל העצים הקדקוד 1 הוא השורש.

כאמור כל מחלקת שקילות מייצגת עץ מישורי אחד עם שורש. לכן, יש 5 עצים מישוריים עם שורש כש- $n = 4$, כפי שאפשר לראות בתרשים 5.6.15.



תרשים 5.6.15: עצים מישוריים מסדר 4 עם שורש.

נשים לב שהחלוקה למחלקות שקילות של עצים מישוריים עם שורש אכן מעדנת את החלוקה למחלקות איזומורפיזם, היות שבתנאי השקילות של עצים מישוריים עם שורש אנו דורשים מהתאמת השמות דרישות נוספות. למשל, בתנאי האיזומורפיזם של עצים מתויגים, די שיחס השכנות יישמר, אך לאו דווקא התנאי "הילד שלי". הדוגמה שלהלן ממחישה את ההבדל בין החלוקה למחלקות איזומורפיזם לבין החלוקה למחלקות שקילות של עצים מישוריים עם שורש.

דוגמה 5.6.12: כפי שהערנו בדוגמה 5.6.10, שני העצים המתויגים השמאליים בתרשים 5.6.13 אינם שקולים בחלוקה המעודנת של עצים מישוריים עם שורש. לעומת זאת הם איזומורפיים, כפי שמראה הפונקציה f המוגדרת על ידי $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 4$. אכן בעץ השמאלי קבוצת הצלעות היא $\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\}$, ואילו בעץ שמימין קבוצת הצלעות היא $\{f(1),f(2)\},\{f(1), f(3)\}, \{f(3), f(4)\}$.

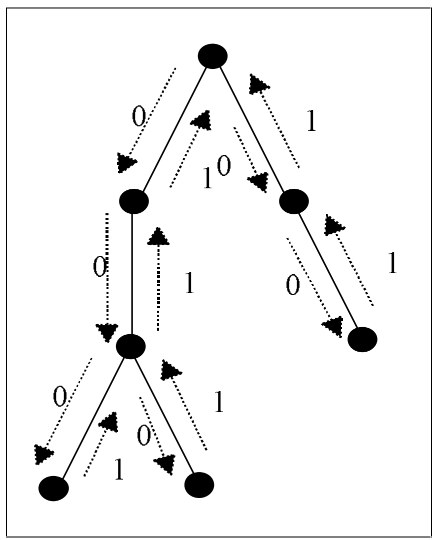
יוצא אם כן שמספר העצים הלא-מתויגים מכל סדר $n \geq 3$ קטן ממספר העצים המישוריים עם שורש. מתברר שאנו יכולים למנות במדויק את העצים המישוריים עם שורש, ובזאת נקבל את החסם העליון המבוקש ל- U_n.

משפט 5.6.13: מספר העצים המישוריים הלא מתויגים עם שורש מסדר n הוא $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

הוכחה: נראה התאמה חח"ע ועל בין עצים מישוריים לא מתויגים עם שורש מסדר n לבין סדרות מאוזנות של 0,1 הכוללות $(n-1)$ אפסים ו- $(n-1)$ אחדים (ראו הגדרה 3.3.7). כזכור, סדרה מאוזנת היא סדרה שבה מספר האפסים שווה למספר האחדים, וכן בכל רישא של הסדרה מספר האפסים גדול או שווה למספר האחדים. הוכחנו במשפט 4.3.11 שמספר הסדרות

המאוזנות שכוללות (n–1) אפסים ו- (n–1) הוא $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ (מספר קטלן), ולכן אם נספק התאמה חח״ע ועל כנ״ל נוכיח את המשפט.

נתבונן לכן בעץ מישורי עם שורש. נתאים לו סדרה מאוזנת כך: נצא משורש העץ ל״טיול״ על קדקודי העץ על פי הכלל הבא. נתחיל כאמור בשורש ונלך אל הילד השמאלי ביותר של השורש. נמשיך ונתרחק מהשורש ככל האפשר. כאשר נגיע לעלה, נסתובב ונחזור אל הקדקוד u שממנו הגענו אל העלה הזה. כעת נלך מ- u אל הילד הבא משמאל של u שעדיין לא ביקרנו בו. ונתמיד שוב בכיוון זה ככל האפשר. אם ל- u אין יותר ילדים שבהם לא ביקרנו, נחזור עוד צעד אחד אחורה על עקבותינו. מי שכבר למד אלגוריתמים, יזהה טיול כזה כחיפוש עומק DFS בגרף (הולכים רחוק ככל האפשר מקדקוד המוצא, ורק כשאין ברירה, חוזרים צעד אחד אחורה ושוב מנסים ללכת קדימה רחוק ככל האפשר, וכך הלאה ברקורסיה).
הסדרה שתתאים לטיול הזה תוגדר כך: בכל פעם שנלך על צלע הרחק מהשורש, נרשום 0 בסדרה. בכל פעם שנלך על צלע בכיוון שמתקרב בחזרה אל השורש, נרשום 1 בסדרה. כך למשל, אפשר לראות בתרשים 5.6.16, טיול כזה על עץ מישורי שבו הקדקוד העליון בציור נבחר בתור שורש העץ. הסדרה המתאימה לטיול שביצענו היא 000101110011.

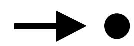
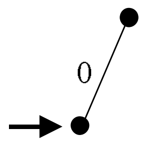
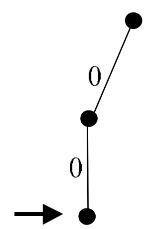
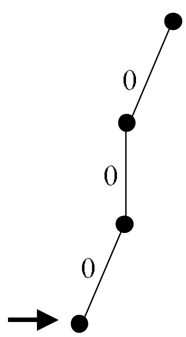
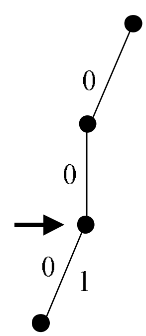
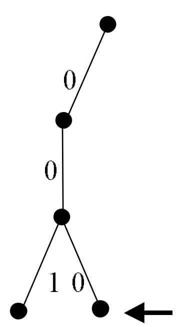


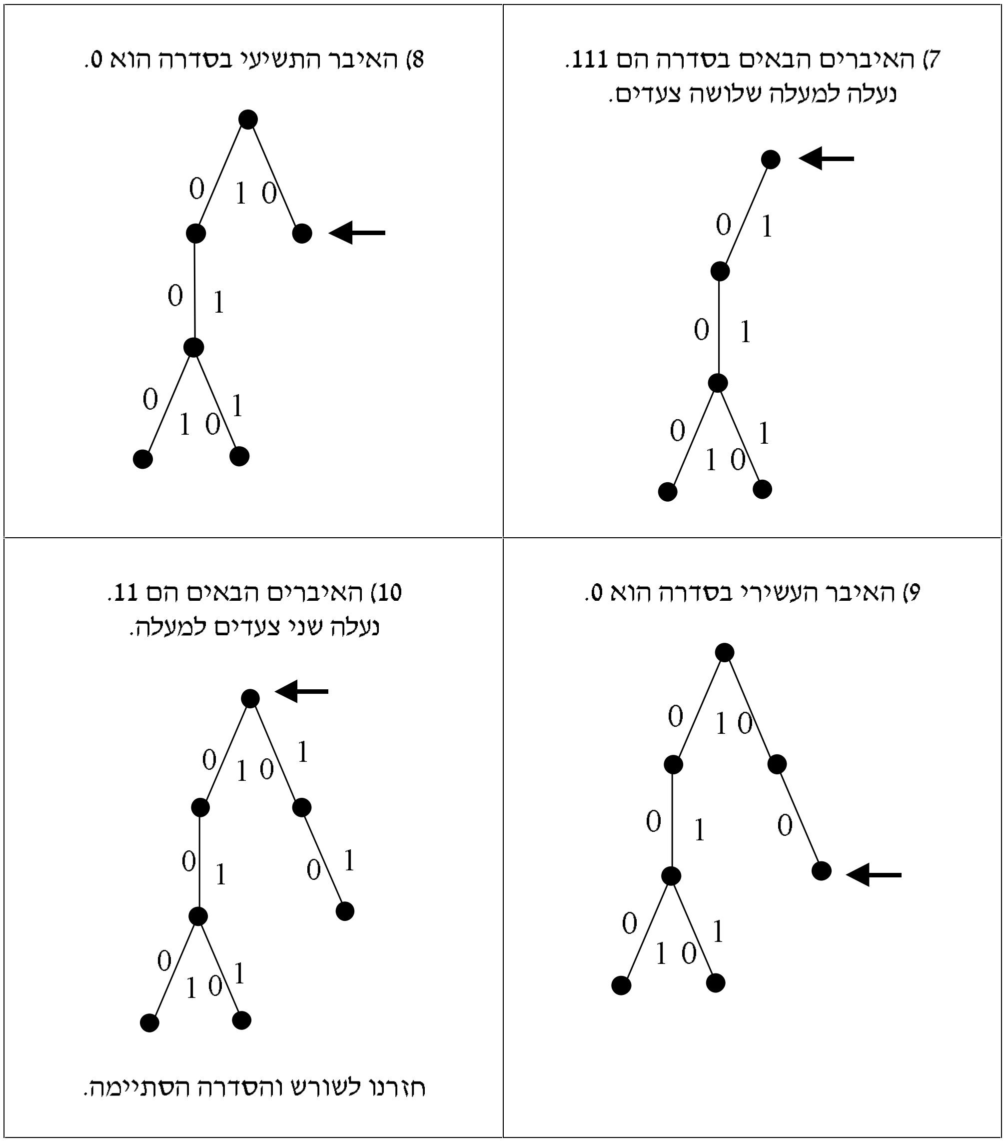
תרשים 5.6.16: טיול על גבי עץ.

הסדרה המתקבלת תכלול אכן (n–1) אפסים ו- (n–1) אחדים, מכיוון שבמהלך הטיול הזה נעבור על כל צלע בדיוק פעמיים, פעם הרחק מהשורש (צעד שמתאים לאפס בסדרה) ופעם בחזרה לכיוון השורש (מהלך שמתאים לאחד בסדרה). כזכור בעץ יש בדיוק (n–1) צלעות. כמו כן, בכל רישא של הסדרה מספר האפסים גדול או שווה למספר האחדים, כי מרחקנו מהשורש תמיד ≥ 0.

ולהיפך, בהינתן סדרה מאוזנת של 0,1, נתאים לה עץ מישורי עם שורש באופן הבא: נצייר תחילה שורש לעץ. נניח שציירנו כבר חלק מהעץ ואנו נמצאים כרגע בקדקוד u. אם האיבר הבא בסדרה הוא 0, נוסיף ל- u עוד ילד חדש מימין לכל ילדיו הקיימים של u. אם האיבר הבא בסדרה הוא 1, נחזור מ- u צעד אחורה לכיוון השורש. קיבלנו עץ מישורי עם שורש כנדרש.

נראה איך לשחזר את העץ המתאים לסדרה 000101110011 בעזרת ההתאמה שתוארה כעת. ראו תרשים 5.6.17.

1) אתחול: נתחיל מעץ שמכיל רק שורש. 	2) האיבר הראשון בסדרה הוא 0. 
3) האיבר השני בסדרה הוא 0. 	4) האיבר השלישי בסדרה הוא 0. 
5) האיבר הרביעי בסדרה הוא 1. נעלה למעלה צעד אחד. 	6) האיבר החמישי בסדרה הוא 0. 



תרשים 5.6.17: שחזור העץ מתוך הסדרה 000101110011.
החץ מציין את מיקומנו הנוכחי בעץ.

מסקנה 5.6.14: $U_n \leq 4^n$.

הוכחה: כפי שראינו מספר העצים המישוריים בעלי שורש הוא חסם עליון ל- U_n. לכן, מספר העצים הלא-מתויגים הוא לכל היותר:

$$U_n \le \frac{1}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}.$$

אולם $\binom{2n-2}{n-1} < \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$,ו- $\binom{2n-2}{n-1}$ הוא רק אחד מן המחוברים בפיתוח של $(1+1)^{2n-2}$ על פי נוסחת הבינום (ראו משפט 4.3.1). לכן,

$$U_n \le \frac{1}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1} \le \binom{2n-2}{n-1} \le (1+1)^{2n-2} = 4^{n-1}.$$

ובזאת מסתיימת ההוכחה. □

בכך נשלמת גם הוכחת החסם העליון של משפט 5.6.9. דיון נוסף במושגים שהוצגו כאן של עצים מתויגים ולא מתויגים אפשר למצוא גם בפרק 9 העוסק בחבורות.

תרגילים

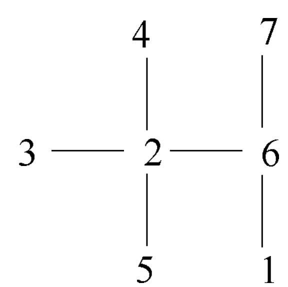
1. א. הוכיחו כי מספר הגרפים הלא-מכוונים המתויגים בעלי n קדקודים הוא $2^{\binom{n}{2}}$.
   ב. הגדירו גרף לא מתויג. ציירו את כל הגרפים הלא מתויגים בעלי 4 קדקודים. תנו חסם תחתון טוב ככל האפשר למספר הגרפים הלא מתויגים מסדר n. (ראו גם סעיף 9.3).

2. הוכיחו שיש $n!/2$ מסלולים מתויגים הכוללים n קדקודים, כאשר $n \ge 2$.

3. הוכיחו כי מספר העצים המתויגים בעלי n קדקודים שבהם לקדקוד ה- n יש דרגה $d_n = k$ הוא $\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$.

4. **יער מתויג שתול** מוגדר כאוסף של עצים מתויגים כאשר לכל עץ ביער יש שורש. הוכיחו שמספר היערות המתויגים השתולים הכוללים n קדקודים הוא $(n+1)^{n-1}$.

5. א. הדגימו את תהליך הבנייה של Prüfer על העץ הבא:



   ב. שחזרו את העץ מתוך הסדרה המתאימה לו.

6. ציירו את כל העצים המישוריים בעלי שורש מסדר 5. מה מספרם של העצים הלא-מתויגים מסדר 5?

7. אומרים שגרף קשיר לא מכוון בעל n קדקודים הוא **אוניציקלי** (חד מעגלי) אם יש בו n צלעות.
   א. תנו אפיון מלא של הגרפים האוניצקליים הקשירים.
   ב. נסמן ב- UC_n את מספר הגרפים האוניציקליים הקשירים המתויגים מסדר n. העריכו היטב ככל שתוכלו את UC_n.

5.7. בעיות קיצון בגרפים

הנושאים שיוצגו: *בעיית רמזי*, *בעיית טוראן*.

נסיים פרק זה בשתי בעיות מפורסמות בתורת הגרפים, המשתייכות לתחום של בעיות קיצון על גרפים: משפטי רמזי ומשפטי טוראן.

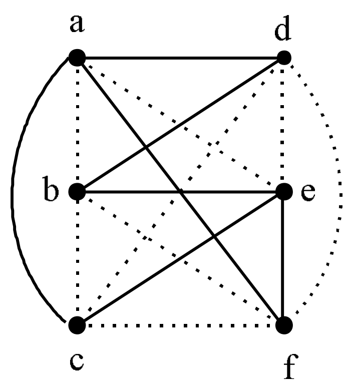
משפטי רמזי

בסעיף 4.5 הוכחנו את המשפט הבא (משפט 4.5.10):

משפט: בכל קבוצה של 6 אנשים יש 3 אנשים שמכירים זה את זה, או 3 אנשים שאינם מכירים זה את זה (כאשר היכרות היא הדדית).

זהו מקרה פרטי לטענה ממשפחת משפטי רמזי שתחילתם בעבודתו של רמזי ב- 1932. אפשר לתאר את הבעיה הנ"ל בעזרת צביעת הצלעות של הגרף השלם K_6 בשני צבעים – אדום וכחול. נסמן כל אדם על ידי קדקוד, ונחבר שני קדקודים על ידי צלע אדומה אם שני האנשים שמיוצגים על ידי קדקודים אלה מכירים זה את זה, ועל ידי צלע כחולה אם שני האנשים אינם מכירים זה את זה (הקוראים מוזהרים לא לבלבל בין מושגי הצביעה הנידונים כאן למושג הצביעה של גרף כפי שראינו בסעיף 5.5). ניסוח אחר של הטענה המנוסחת למעלה יהיה אם כן: בגרף המתקבל יש משולש אדום (במקרה שיש 3 אנשים שמכירים זה את זה), או שיש משולש כחול (במקרה שיש 3 אנשים שאינם מכירים זה את זה). הוכחנו לכן את המסקנה הבאה.

מסקנה 5.7.1: יהי K_6 הגרף השלם על 6 קדקודים, ונניח שצלעותיו צבועות באדום או בכחול. אז יש ב-K_6 משולש אדום או שיש ב-K_6 משולש כחול (או שניהם).



תרשים 5.7.1: הגרף K_6 צבוע בשני צבעים, כאשר צבע אחד מסומן בקו מודגש והצבע השני בקו מקווקו.

בעיית רמזי לגרפים: יהיו $s,t \in \mathbb{N}^+$. מהו המספר הטבעי הקטן ביותר R כך שבכל צביעה בשני צבעים (אדום וכחול) של צלעות הגרף השלם K_R, קיים תת-גרף שלם K_s שצבוע בכחול או שקיים תת-גרף שלם K_t שצבוע באדום? מכיוון שהמספר R תלוי ב- s,t נסמן אותו ב- $R = R(s,t)$.

משפט 5.7.2 (Erdős, Szekeres): $R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$. ובמילים: אם $R \ge \binom{s+t-2}{s-1}$ וצובעים את צלעותיו של הגרף השלם K_R בכחול ואדום, אז יש s קדקודים שכל הצלעות ביניהם כחולות, או שיש t קדקודים שכל הצלעות ביניהם אדומות.

הוכחה: נוכיח את המשפט באינדוקציה על הסכום s+t.

בסיס האינדוקציה: נשים לב תחילה שאם $s = 1$ או ש- $t = 1$, אז המשפט נכון באופן ריק (הרי בגרף עם קדקוד אחד אין צלעות).

שלב האינדוקציה: נניח עתה ש- $s,t \ge 2$ ונוכיח את הטענה לגבי s+t. נגדיר $R = \binom{s+t-2}{s-1}$. על פי זהות פסקל (ראו משפט 4.3.6):

$$R = \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = A + B.$$

נתבונן בצביעה כלשהי של צלעות הגרף השלם K_R בכחול ובאדום. נבחר קדקוד כלשהו x בגרף ונביט ב- $(R-1)$ הצלעות החלות בו. נשים לב: או שחלות ב- x לפחות A צלעות כחולות או שחלות ב- x לפחות B צלעות אדומות (אחרת דרגתו של x תהיה לכל היותר $A-1 + B-1 = R-2$). נניח שחלות ב- x לפחות A צלעות כחולות (המקרה השני שחלות ב- x לפחות B צלעות אדומות מטופל בדיוק באותו אופן).

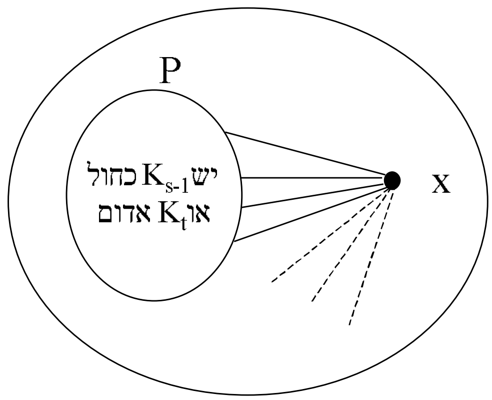
תהי $P = \{y \mid \text{כחולה } \{x,y\}\}$ קבוצת "השכנים הכחולים של x", דהיינו הקדקודים שמחוברים ל- x על ידי צלע כחולה. על פי ההנחה לגבי מספר שכניו הכחולים של x מתקיים $|P| \ge A$. לפי הנחת האינדוקציה לגבי הסכום $(s-1) + t$ מתקיים:

$$, R(s-1,t) \le \binom{s+t-3}{s-2} = A$$

ולכן:

$$. R(s-1,t) \le \binom{s+t-3}{s-2} = A \le |P|$$

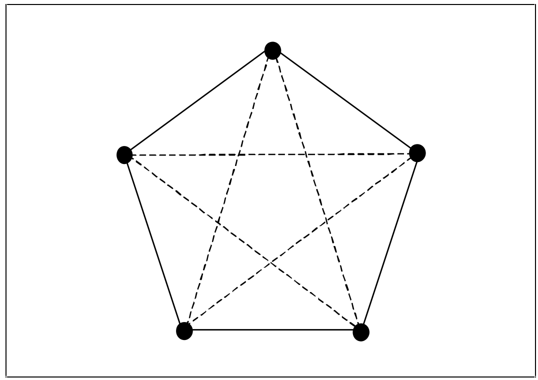
נביט עתה בגרף השלם שקבוצת הקדקודים שלו היא P. זהו גרף שלם בעל |P| קדקודים. לכן, מתוך הנחת האינדוקציה נובע שבגרף השלם המוגדר על הקבוצה P: או שיש K_{s-1} כחול או שיש K_t אדום. אם יש K_t אדום – סיימנו, כי זהו גם K_t אדום בגרף המקורי. מאידך, אם קיבלנו K_{s-1} כחול, נצרף אליו את x ונקבל K_s כחול כנדרש בגרף המקורי (זכרו שכל הקדקודים בגרף K_{s-1} המדובר שייכים ל- P ולכן מחוברים ל- x על ידי צלע כחולה). □



תרשים 5.7.2: הוכחת משפט 5.7.2.
הצלעות הרציפות צבועות בכחול והמקווקוות באדום.

משפט 5.7.3: $R(3,3) = 6$.

הוכחה: הוכחנו כבר את החסם $R(3,3) \le 6$ (מסקנה 5.7.1). נותר רק להראות כי $R(3,3) > 5$. דהיינו, עלינו להראות כיצד אפשר לצבוע את צלעותיו של הגרף השלם K_5 בכחול ובאדום, כך שלא יהיה משולש כחול ולא יהיה משולש אדום. צביעה כזאת מופיעה בתרשים 5.7.3. □



תרשים 5.7.3: צביעה של K_5 ללא משולש חד-גוני, כאשר צבע אחד מסומן בקו מודגש והצבע השני בקו מקווקו.

שימו לב עוד שהחסם העליון שהוכחנו במשפט 5.7.2 אינו הדוק לרוב הזוגות s,t. למעשה, החישוב של מספרי רמזי R(s,t) הוא קשה, והערך המדויק ידוע רק למספר קטן של ערכים של $s,t \geq 3$, כפי שמראה הטבלה הבאה.

R(3,9) = 36	R(3,6) = 18	R(3,3) = 6
R(4,4) = 18	R(3,7) = 23	R(3,4) = 9
R(4,5) = 25	R(3,8) = 28	R(3,5) = 14

הנה סיפור ידוע הקשור למתמטיקאי פול ארדש מאבות המתמטיקה הבדידה. כפי שראינו $R(3,3) = 6$. לא קשה כל כך גם להוכיח כי $R(4,4) = 18$, אבל כבר הערך של R(5,5) אינו ידוע. ארדש, שהיה שוחר שלום מובהק, נהג לתאר כך עד כמה הבעיה היא קשה. הוא אמר שאם ינחתו על כדור הארץ חייזרים ויאיימו להשמיד אותנו אם לא נגלה להם מהו ערכו של R(5,5), אז יש לגייס את מיטב המתמטיקאים וכל המחשבים בעולם כדי להינצל. ואולם, אם הם ידרשו את ערכו של R(6,6), יש להתחיל מיד בחיפוש שיטה למתקפת נגד.

נעיר עוד (והפעם ברוח רצינית קצת יותר) שיש עניין רב גם במציאת הערכה **אסימפטוטית** למספרים R(s,t) (ראו פרק 7 לדיון בהערכות אסימפטוטיות). בפרט ראינו כי:

$$R(n,n) \leq \binom{2n-2}{n-1} < 4^{n-1}.$$

האם נוכל למצוא גם חסמים תחתונים קרובים? ניתן להוכיח, בעזרת שיקולים הסתברותיים כי:

$$R(n,n) > 2^{n/2}$$

כפי שנראה בהמשך בפרק 8 (משפט 8.8.3). שיפור ההערכות האסימפטוטיות למספרי רמזי נמנה עם הבעיות הפתוחות המפורסמות בקומבינטוריקה.

בעיית טוראן

בעיית טוראן שבה נדון כעת היא אב טיפוס של בעיות קיצון בתורת הגרפים. זהו תחום עשיר בבעיות ותוצאות. משפט טוראן מנסה לתת תוקף לאינטואיציה שבגרף עשיר בצלעות ניתן ודאי למצוא תת-גרפים "צפופים", ובפרט גרפים שלמים די גדולים. השאלה הראשונה מטיפוס זה העולה על הדעת היא:

מהו המספר $m = T(n,3)$ הטבעי הקטן ביותר, כך שבכל גרף עם n קדקודים ו- m צלעות יש בהכרח משולש? באופן כללי יותר נשאל:

בעיית טוראן: מהו המספר $m = T(n,t)$ המזערי, כך שבכל גרף עם n קדקודים ו- m צלעות יש בהכרח תת-גרף שלם K_t?

לחילופן ניתן לשאול: מהו המספר המירבי של צלעות שייתכנו בגרף עם n קדקודים שאינו מכיל תת-גרף שלם K_t?

משפט טוראן עונה על הבעיה שהוצגה זה עתה. נראה תחילה את הפתרון עבור $t = 3$. מקרה זה הוכח עוד ב- 1907 על ידי מנטל Mantel.

משפט 5.7.4: יהי G גרף בעל n קדקודים **וללא** משולשים. אז ב- G יש לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ צלעות.

כמו-כן החסם $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ הדוק, כלומר לכל n, קיים גרף בעל n קדקודים ו- $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ צלעות שאינו מכיל משולש.

הוכחה: נראה תחילה שהחסם הדוק. כלומר, נראה שקיים גרף בעל n קדקודים ו- $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ צלעות שאינו מכיל משולש. נוכיח את הטענה עבור n זוגי. ההוכחה ל- n אי-זוגי דומה. נניח אם כן ש- $n = 2p$, ונסתכל על הגרף הדו-צדדי השלם $K_{p,p}$. בגרף הזה יש n קדקודים, $p^2 = \frac{n^2}{4}$ צלעות ואין בו כמובן משולש כי בגרף דו-צדדי כל המעגלים זוגיים (משפט 5.2.15).

נוכיח כעת שאם בגרף G אין משולשים אז מספר הצלעות הוא לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. נשוב ונתרכז במקרה ש- $n = 2p$ זוגי. הוכחה דומה תתאים גם ל- n אי-זוגי.

נוכיח באינדוקציה על p שבגרף עם $n = 2p$ קדקודים וללא משולשים, מספר הצלעות הוא לכל היותר $\frac{n^2}{4} = \frac{(2p)^2}{4} = p^2$.

בסיס האינדוקציה: $p = 1$ ו- $n = 2$. לכן $p^2 = 1$. אבל בגרף עם שני קדקודים אין משולש.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות לכל הגרפים עם לכל היותר $n = 2p$ קדקודים, ונוכיח לגרף עם $n + 2 = 2(p+1)$ קדקודים.

יהי $G = (V,E)$ גרף עם $2(p + 1)$ קדקודים ללא משולשים, ויהיו x,y שני קדקודים שכנים בגרף. יהי $G' = (E', V')$ התת-גרף המתקבל מ- G על ידי השמטת הקדקודים x,y, וכל הצלעות החלות בהם. בגרף G' יש $2p$ קדקודים ואין בו משולשים. לכן, לפי הנחת האינדוקציה $|E'| \le p^2$.
כמה צלעות נוספות ייתכנו בגרף G שאינן בגרף G'? כדי לענות על שאלה זו, נסמן ב- A את קבוצת השכנים של x ב- G, לא כולל את y, וב- B את קבוצת השכנים של y ב- G, לא כולל את x. נשים לב שלא ייתכן שלקדקודים x,y יש שכן משותף z, אחרת הקדקודים x,y,z יהיו משולש. לכן, הקבוצות A,B זרות. כמו-כן הקבוצות A,B מוכלות בקבוצת הקדקודים של הגרף G', שהיא קבוצה מגודל $2p$. לכן, $|A| + |B| \le 2p$. מתקבל החסם הבא על מספר הצלעות ב- G:

$$|E| = |E'| + |A| + |B| + 1 \le p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 .$$

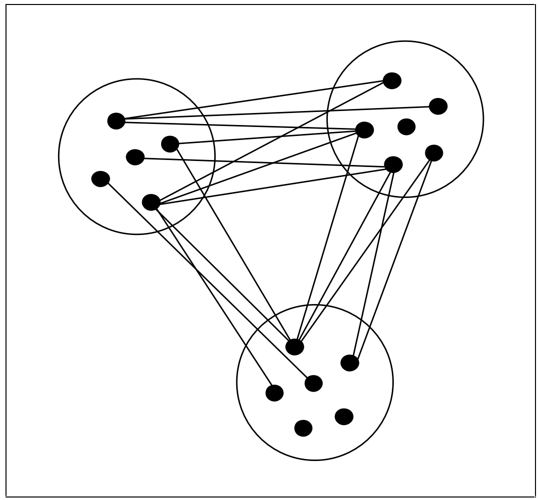
המחובר $|E'|$ מונה את הצלעות ב- G שאינן חלות לא ב- x ולא ב- y, המחובר $|A|$ מונה את הצלעות שחלות ב- x פרט לשכן y, המחובר $|B|$ מונה את הצלעות שחלות ב- y פרט לשכן x, ואילו המחובר 1 מונה את הצלע בין x ל- y.
לכן מספר הצלעות ב- G הוא לכל היותר $(p+1)^2$ כנדרש. □

התחלנו בחישוב $T(n,3)$ בשל פשטות ההוכחה. נפנה עתה לניסוח ולהוכחה של משפט טוראן הכללי. כפי שראינו קודם, קל היה יחסית למצוא בנייה של גרפים עשירים בצלעות וחסרי משולשים. האם נוכל למצוא בנייה דומה גם לגרפים חסרי K_t? האינטואיציה שהושגה בבנייה הקודמת תסייע לנו כאן. אנו נחלק את קבוצת הקדקודים ל- $(t-1)$ חלקים שווים ככל האפשר, ונבנה את הגרף שבו שני קדקודים מחוברים על ידי צלע אם ורק אם הם אינם באותו החלק. כל אחד מהחלקים יכיל $\left\lfloor \frac{n}{t-1} \right\rfloor$ או $\left\lceil \frac{n}{t-1} \right\rceil$ קדקודים (שימו לב שבכך הוגדרה הבנייה באופן יחיד). אנו נקרא לגרף המתקבל $G(n,t)$.
לא קשה לראות שהגרף $G(n,t)$ אינו מכיל תת-גרף שלם K_t: מכיוון שקדקודי $G(n,t)$ מתחלקים ל- $(t-1)$ חלקים, אז לפי עקרון שובך היונים בכל קבוצה של t קדקודים יש לפחות שניים השייכים לאותו חלק ולכן אינם מחוברים על ידי צלע. לכן אין בגרף תת-גרף שלם K_t.
מהו מספר הצלעות ב- $G(n,t)$? אם נניח למען הנוחות ש- n מתחלק ב- $(t-1)$ ללא שארית, אז לא קשה לוודא שמספר הצלעות הוא:

$$\binom{n}{2} - \binom{n/(t-1)}{2}(t-1) = \frac{n}{2} \cdot \left[(n-1) - \left(\frac{n}{t-1} - 1 \right) \right] = \frac{n^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{t-1} \right) = n^2 \cdot \frac{t-2}{2(t-1)}$$

הנוסחה למקרה הכללי כש- n אינו מתחלק ב- $(t-1)$ מעט יותר מסובכת.

דוגמה 5.7.5: $t = 4, n = 17$. נחלק את 17 הקדקודים לשלושה חלקים - שתי קבוצות של 6 קדקודים כל אחת וקבוצה נוספת של 5 קדקודים. נוסיף את כל הצלעות בין קדקודים שאינם שייכים לאותו חלק. הגרף המתקבל מצויר בתרשים 5.7.4. מספר הצלעות בגרף הזה הוא $5 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 96$.



תרשים 5.7.4: הגרף $G(17,4)$. לא כל הצלעות בין החלקים מופיעות.

נשלים את התמונה על ידי שנוכיח:

משפט 5.7.6 (טוראן): לכל $n \ge t$ טבעיים, הגרף $G(n,t)$ מכיל את מספר הצלעות המירבי מבין כל הגרפים שאינם מכילים תת-גרף שלם K_t.

נוכיח תחילה את הטענה הבאה.

טענה 5.7.7: מבין כל הגרפים ה- $(t-1)$ – צביעים מסדר n, יש ב- $G(n,t)$ המספר המירבי של צלעות.

הוכחה: אם $G = (V,E)$ הוא $(t-1)$ – צביע, משמע שניתן לחלק את קבוצת הקדקודים V ל- $(t-1)$ קבוצות זרות $V_1,\ldots,V_{t-1}$ כאשר בקבוצה V_i נמצאים הקדקודים שצבעם i, וכל אחת מהקבוצות V_i היא קבוצה בלתי תלויה שאינה מכילה צלעות. מאידך, היות שאנו מעוניינים בהגדלת מספר הצלעות ככל האפשר, אפשר להניח שכל שני קדקודים, אחד מ- V_i והשני מ- V_j יהיו שכנים כאשר $i \ne j$. לכן בלי הגבלת הכלליות קבוצת הצלעות E כוללת את כל הצלעות האפשריות בין קדקודים מ- V_i ל- V_j לכל $i \ne j$.

לכן, אם נסמן $|V_i| = a_i$ אז ב- G יש $n = \sum_{i=1}^{t-1} a_i$ קדקודים ו- $\sum_{1\le i<j\le t-1} a_i a_j$ צלעות. נותר רק לפתור את בעיית המקסימום הבאה:

מהו המקסימום של הביטוי $\max \sum_{1\le i<j\le t-1} a_i a_j$, כאשר $a_1,\ldots,a_{t-1} \ge 0$ מספרים שלמים המקיימים $\sum_{i=1}^{t-1} a_i = n$?

אלמלא האילוץ שהמספרים a_i יהיו שלמים, היינו פותרים תרגיל קל בחשבון דיפרנציאלי, ומוצאים שהמקסימום מתקבל כאשר $a_1 = \ldots = a_{t-1} = \frac{n}{t-1}$ (בפרט אם n מתחלק ב- $(t-1)$ ללא שארית אז זהו אכן הפתרון). אנו משאירים זאת כתרגיל לקוראים לברר שלנוכח האילוץ ש- a_i מספרים שלמים, הבחירה האופטימלית היא שכל ה- a_i שווים ל- $\left\lfloor \frac{n}{t-1} \right\rfloor$ או ל- $\left\lceil \frac{n}{t-1} \right\rceil$. וכן שהתנאי הזה מגדיר את הפתרון באופן יחיד. ראו תרגיל 3. □

הוכחת משפט 5.7.6: רעיון ההוכחה הוא להראות שלכל גרף $G = (V,E)$ מסדר n שאינו מכיל תת-גרף K_t, יש גרף $H = (V,E')$ מסדר n שהוא $(t-1)$ – צביע, כך שמספר הצלעות בגרף H אינו נופל ממספרן בגרף G. נכונות המשפט תנבע אז ישירות מהטענה האחרונה שבה הוכחנו כי הגרף $G(n,t)$ מכיל את מספר הצלעות המירבי מבין כל הגרפים ה- $(t-1)$ – צביעים (שימו לב שלגרפים G ו- H יש אותה קבוצה של קדקודים V).

טכנית נראה שלכל קדקוד $x \in V$ מתקיים $degree_H(x) \geq degree_G(x)$, כלומר דרגתו של x בגרף H אינה נופלת מדרגתו של x בגרף G. נזכיר כי $\sum_{x \in V} degree_G(x) = 2|E|$ ובאופן דומה $\sum_{x \in V} degree_H(x) = 2|E'|$ (משפט 5.1.5). לכן, מספר הצלעות ב- H אינו נופל ממספרן ב- G. הטענה הבאה מספקת את הצעד החסר להשלמת ההוכחה של משפט טוראן. □

טענה 5.7.8: יהי $G = (V,E)$ גרף שאינו מכיל את הגרף השלם K_t. אז יש גרף $H = (V,E')$ כך שהגרף H הוא $(t-1)$ – צביע, ולכל קדקוד $x \in V$ מתקיים $degree_H(x) \geq degree_G(x)$.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על t.

בסיס האינדוקציה: $t = 2$. במקרה זה ב- G אין צלעות, ולכן G הוא 1-צביע. הטענה מתקיימת עבור $H = G$.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $t-1$ ונוכיח ל- t. נבנה את הגרף H מתוך הגרף G באופן הבא. יהי $x \in V$ קדקוד בעל דרגה מירבית ב- G. נחלק את הקבוצה V לשלושה החלקים הבאים (ראו תרשים 5.7.5):

א. הקדקוד x.

ב. הקבוצה $\Gamma(x)$ של שכני x.

ג. הקבוצה $B = V \setminus (\Gamma(x) \cup \{x\})$ הכוללת את הקדקודים שאינם שכנים של x.

את קבוצת השכנים של x לא נשנה. גם את הצלעות בין הקדקודים בקבוצה $\Gamma(x)$ לא נשנה. לעומת זאת, נגדיר מחדש לכל $y \in B$ את קבוצת השכנים החדשה שלו כ- $\Gamma(x)$ (כלומר נוריד את כל הצלעות שחלות בקדקוד y בגרף G, ונחבר אותו לכל הקדקודים שהיו שכני x בגרף G). שימו לב שהשמטנו גם את כל הצלעות הפנימיות ב- B. נקרא לגרף המתקבל G_1.

תהי $V_1 = \{x\} \cup B$. נשים לב שלכל קדקוד $u \in V_1$ מתקיים:

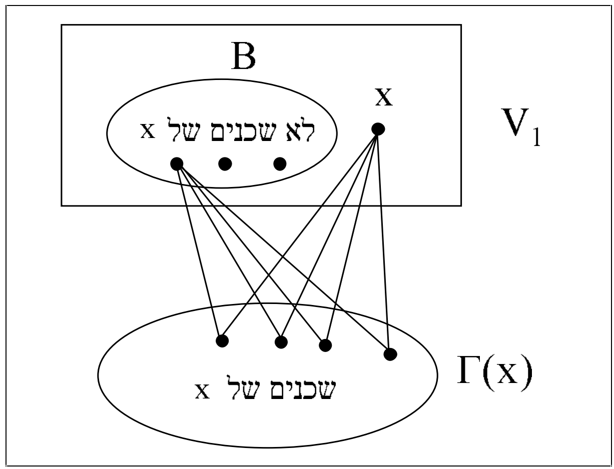
$$degree_{G_1}(u) \geq degree_G(u),$$

מכיוון ש- x היה קדקוד בעל דרגה מירבית ב- G. כמו-כן, אפשר לצבוע את הקדקודים בקבוצה V_1 בצבע אחד (זו קבוצה בלתי תלויה של קדקודים ב- G_1, ולכן לא ייתכנו שני קדקודים שכנים הצבועים באותו צבע).

נתבונן כעת בתת-גרף $G \setminus V_1$ של G, המוגדר על קבוצת הקדקודים $\Gamma(x)$. התת-גרף $G\setminus V_1$ אינו מכיל את הגרף השלם K_{t-1} (אחרת, ביחד עם x היינו מקבלים תת-גרף K_t ב- G בניגוד להנחה). לכן, לפי הנחת האינדוקציה יש גרף אחר, נניח H_1 על קבוצת הקדקודים $\Gamma(x)$, כך ש- H_1 הוא $(t-2)$ – צביע, ולכל $u \in \Gamma(x)$ מתקיים:

$$\text{degree}_{H_1}(u) \geq \text{degree}_{G\setminus V_1}(u).$$

הגרף H יוגדר כעת בתור הגרף המכיל את כל הצלעות שמכיל H_1, ובנוסף את הצלעות בין הקבוצה V_1 ל- $\Gamma(x)$ בגרף G_1. מכיוון שצבענו את V_1 בצבע אחד, והגרף H_1 הוא $(t-2)$ – צביע, הרי H הוא $(t-1)$ – צביע, וראינו שדרגת הקדקודים בו היא כנדרש. □



תרשים 5.7.5: הוכחת טענה 5.7.8.

תרגילים

1. הוכיחו כי מספרי רמזי מקיימים את נוסחת הנסיגה הבאה:
$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

2. הוכיחו כי $R(3, 4) \geq 9$ על ידי כך שתמצאו צביעה של צלעות K_8 בכחול ובאדום ללא תת-גרף K_3 כחול וללא תת-גרף K_4 אדום.

3. יהיו $a_1,\ldots,a_{t-1} \geq 0$ מספרים שלמים המקיימים $\sum_{i=1}^{t-1} a_i = n$. הוכיחו שהמקסימום של הביטוי $\max \sum_{1\leq i<j\leq t-1} a_i a_j$ מתקבל כאשר כל ה- a_i שווים ל- $\left\lfloor \frac{n}{t-1} \right\rfloor$ או ל- $\left\lceil \frac{n}{t-1} \right\rceil$.
כמו-כן התנאי הזה מגדיר את הפתרון באופן יחיד.
הדרכה: הראו שאם $a_i \geq a_j + 2$ אז על ידי הגדלת a_j באחד והקטנת a_i באחד, המצב רק משתפר.

הערות היסטוריות

ליאונרד אוילר Leonhard Euler (נולד בשוויץ ב- 1707, מת ברוסיה ב- 1783). היה אחד מן המתמטיקאים הפוריים ביותר בתולדות המתמטיקה. הוא המציא הרבה מן הסימונים היסודיים שבהם אנו משתמשים עד היום. כך למשל, הוא הכניס את הסימון $f(x)$ לפונקציה, את הסימון e לבסיס הטבעי של הלוגריתם הטבעי, את π, את סימון הסכום Σ ועוד. אוילר תרם תרומות חשובות לתורת המספרים, כמו פונקצית אוילר (ראו סעיף 4.6). הייתה לו יכולת חישובית יוצאת מן הכלל, ובני דורו אמרו עליו שהוא "האנליזה בהתגלמותה". כך למשל, הוא הפריך השערה של פרמה שחשב ש- $F_n = 2^{2^n}+1$ הוא תמיד מספר ראשוני, בכך שהראה כי F_5 מתחלק ב- 641. כמו-כן הוא הצליח להוכיח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. חישוב ערכו של הטור האינסופי הזה העסיק מתמטיקאים רבים ומפורסמים לפניו, ובהם מתמטיקאים ממשפחת ברנולי. אוילר גם הוכיח כי $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)$ שואף לגבול $\gamma = 0.5772...$ כאשר $n\to\infty$. הקבוע γ נקרא קבוע אוילר (ראו סעיף 7.2). הוא גם תרם תרומות יסודיות לחקר הפונקציות של מספרים מרוכבים והראה כי $e^{ix}=\cos x + i\sin x$. כמו-כן, הוא השיג הישגים חשובים בחקר אינטגרלים, ביסודות תורת הווריאציות ובמכניקה. עבודותיו בתורת הגרפים (ראו סעיף 5.2 וסעיף 5.3) נחשבות לעבודות המוקדמות ביותר בשטח זה.

כוח החישוב הנדיר שלו שירת אותו היטב כאשר התעוור בערוב ימיו, ועל אף הקשיים הוא הצליח להמשיך ולחקור.

פול ארדש Paul Erdős (נולד בהונגריה ב- 1913, מת בפולין ב- 1996). נחשב למתמטיקאי הפורה ביותר בכל הזמנים. הוא כתב למעלה מ- 1500 מאמרים מתמטיים. ארדש היה ילד פלא וכתב את המאמר המתמטי הראשון שלו עוד בהיותו בן 17. במאמר זה הוא נתן הוכחה אלמנטרית ואלגנטית למשפט "לכל n טבעי יש מספר ראשוני בין n ל- 2n". ברטרנד Bertrand היה הראשון ששיער את המשפט הזה, ואילו צ'בישב מצא את ההוכחה הראשונה למשפט זה. ארדש הצעיר היה כה מרוצה מהישגו עד שחיבר עליו את השיר הקטן הבא:

Chebyshev proved it,
and I prove it again;
There is always a prime
between n and 2n.

כמה מהרעיונות המרכזיים בהוכחה של ארדש אפשר למצוא בסעיף 7.5. ארדש נחשב בצדק לאבי הקומבינטוריקה המודרנית ולמייסדה של השיטה ההסתברותית (ראו סעיף 8.8). הוא תרם תרומות מכריעות גם לתורת המספרים ולתורת הקבוצות.

חייו של ארדש לא ידעו שלווה רבה. בשל היותו יהודי הוא נאלץ לעזוב, עם התחזקות הנאצים באירופה, את הונגריה מולדתו לאנגליה ואחר כך עבר לארה"ב. הוא סבל מיחס גרוע של שלטונות ההגירה בארה"ב בתקופת ההיסטריה המקרתיסטית בארה"ב. חלק גדול מזמנו בתקופה זו בילה ארדש בישראל (בעיקר בטכניון).

ארדש ניהל אורח חיים ייחודי – הוא הקדיש את כל חייו למתמטיקה, לא הקים משפחה, נמנע מצבירת רכוש כלשהו ולא החזיק במשרה קבועה אף פעם. הוא ראה חשיבות רבה בטיפוח ילדים

מחוננים. בכספים שהוא קיבל על הרצאותיו ובכספי הפרסים שבהם זכה, הוא עשה בעיקר שני שימושים: סיוע לסטודנטים נזקקים ומתן פרסים למתמטיקאים שהצליחו לפתור את הבעיות שהציב.

ויליאם רואן המילטון William Rowan Hamilton (אירלנד 1865-1805). המילטון היה ילד פלא חריג בכשרונותיו. כבר בגיל 5 הוא שלט בלטינית, יוונית ועברית. בהיותו בן 21 ובעודו סטודנט לתואר בוגר, הוא התמנה לפרופסור לאסטרונומיה בטריניטי קולג'.
המילטון תרם תרומות חשובות למספר תחומים יסודיים בפיזיקה, וכמה מושגי יסוד בפיזיקה קרויים על שמו. לאחר שהגדיר את המספרים המרוכבים כזוגות סדורים של מספרים ממשיים, חיפש המילטון שנים רבות את האנלוג התלת-ממדי המתאים. כך הוא הגיע להגדרה של הקווטרניונים – אלגברה לא קומוטטיבית. הוא התעניין גם בחידות מתמטיות וכך תרם גם לחקר תורת הגרפים: מעגל המילטון נקרא על שמו (ראו סעיף 5.3).
אהבתו הנכזבת ורבת השנים לקתרין דיסני, ליוותה את המילטון לאורך כל חייו.

פול טוראן Paul Turán (הונגריה 1976-1910). עסק בעיקר בתורת המספרים האנליטית. טוראן, יהודי במוצאו, נלקח בזמן מלחמת העולם השנייה למחנה כפייה נאצי. בהיותו במחנה הזה הוא עורר כמה שאלות יסודיות בתורת הגרפים וגם הצליח לפתור אותן. הוא תרם גם תרומות חשובות לפיתוח השיטה ההסתברותית ולשימושיה באלגברה ובתורת המספרים.

ארת'ור קיילי Arthur Cayley (אנגליה 1895-1821). מן החוקרים המשפיעים ביותר באלגברה, בפרט בתורת החבורות, וביסודות הגיאומטריה. קיילי הצטיין בלימודיו בטריניטי קולג' שבקמייברידג', פרסם מאמרים עוד בהיותו סטודנט וזכה בפרסים כבר בשלב זה. אולם עם תום המלגה שאפשרה את עבודתו במקום, הוא נאלץ לבחור לעצמו מקצוע ובחר בלימודי משפטים. במשך 14 שנים הוא עבד כעורך דין פעיל וכמתמטיקאי חובב. מלבד קריירה מוצלחת כעורך דין, הוא פרסם בתקופה זו כ- 250 מאמרים מתמטיים. בהיותו בן 42 הוא מונה לפרופסור בקיימברידג'. אף כי המעבר מעריכת דין למתמטיקה גרם לנסיגה חמורה בהכנסותיו, שמח קיילי על השינוי. קיילי היה חוקר פורה מאוד ופרסם כ- 900 מאמרים. ההגדרות המופשטות הראשונות של חבורה מופיעות בכתביו, ועבודותיו בגיאומטריה שימשו כבסיס לפיתוח מכניקת הקוונטים.

פרנק פלמפטון רמזי Frank Plampton Ramsey (אנגליה 1930-1903). על אף חייו הקצרים, הצליח רמזי לתרום מספר תרומות משמעותיות. במאמר קצר משנת 1930, הוא ייסד למעשה את התחום הקרוי היום על שמו - תורת רמזי בקומבינטוריקה. בספר זה אנו מציגים רק את משפט רמזי לגרפים (ראו סעיף 5.7), אולם העיקרון הבסיסי האומר שבכל מערכת גדולה מספיק יימצאו איים של סדר, תקף בהקשרים רבים נוספים. משפטים מטיפוס רמזי מעוררים עניין רב גם בתורת המספרים ובגיאומטריה. מלבד עבודתו המתמטית, עסק רמזי בהצלחה רבה גם בלוגיקה, בפילוסופיה וביסודות התיאוריה הכלכלית.