4. קומבינטוריקה

קומבינטוריקה היא ענף במתמטיקה שעוסק בחקר קבוצות סופיות או קבוצות בדידות (כמו קבוצת המספרים השלמים), ובמבנים השונים שניתן לבנות בעזרתן של קבוצות אלה. את הבעיות היסודיות שבהן עוסקת הקומבינטוריקה ניתן לסווג כך:

1. בעיות מניה: כמה פתרונות שונים יש לבעיה כלשהי?
2. בעיות קיצון: מהו ערכם של הפתרונות הטובים ביותר?
3. בניות קומבינטוריות: בניית פתרון כלשהו לבעיה.
4. אופטימיזציה קומבינטורית: מציאת הפתרון הטוב ביותר לבעיה כלשהי.
5. בעיות הכרעה וקיום: האם לבעיה מסוימת קיים פתרון אחד לפחות?

כמה מהנושאים האלה מהווים בעצם את עיקרו של הספר הזה. על מנת להדגים כמה מהשאלות שבהן מדובר, נעסוק בבעיית הטוטו. טופס טוטו כולל 16 משחקים. כל משחק יכול להסתיים בניצחון הקבוצה המארחת (1), בניצחון הקבוצה האורחת (2), או בתיקו (X).

בעיית מניה אופיינית במקרה זה תשאל: בכמה אופנים ניתן למלא טופס טוטו, או בכמה אופנים ניתן למלא את הטופס כך שלא יהיו יותר מ- 5 תוצאות תיקו, או בכמה דרכים ניתן למלא את הטופס כך שמספר ה- 1 בטופס עולה על מספר ה- 2 וכיוצא בזה.

כפי שנראה בהמשך מספר הדרכים למלא טופס טוטו הוא $3^{16} = 43,046,721$. לא קשה לראות שמספר קטן בהרבה של ניחושים כבר יבטיח, שיהיו תוצאות המשחקים אשר יהיו, מובטח לנו שננחש נכונה לפחות 12 מהתוצאות. **בעיית קיצון** אופיינית תשאל: מהו המספר המזערי של טפסים שיש למלא על מנת להבטיח בוודאות שננחש נכונה לפחות 12 משחקים (אגב, שאלות כאלה מתעוררות גם בהקשר מעשי חשוב לא פחות, אף כי אולי מלהיב קצת פחות מאשר מילוי טופסי טוטו. מדובר בשאלה כיצד ניתן להשיג שידור אמין בערוצי תקשורת רועשים. זוהי בעיה יסודית בתורת התקשורת הקרויה בעיית הקודים לתיקון שגיאות).

גם אם ידוע לנו המספר המזערי הזה של טפסים, עדיין לא ברור כיצד **לבנות** טופס כזה. שיטה שתאפשר לנו למלא טופס כזה תיקרא אם כן **בנייה קומבינטורית**.

לרוב יש לנו מידע נוסף שעליו אנו יכולים להסתמך בניסיון לזכות בטוטו. על סמך תוצאות העבר, מזג-האוויר וכדומה ניתן להעריך את הסבירות של התוצאות במשחקים השונים, או גם צירופים

שלהם כגון "אם יורד גשם, לקבוצות הביתיות יש נטייה לנצח". בהינתן מידע נוסף כזה, אנו מעוניינים בניחוש או בניחושים **הטובים ביותר**. זו אם כן **בעיית אופטימיזציה** קומבינטורית.

בפרק זה נעסוק בעיקר בתחום של בעיות מניה ונפתח שיטות ישירות ועקיפות לספירה.

4.1. כללי מניה בסיסיים

הנושאים שיוצגו: *עקרון הסכום, עקרון המכפלה, הרחבות.*

נפתח סעיף זה בשני עקרונות פשוטים המתארים כיצד לחשב את עוצמת האיחוד של שתי קבוצות סופיות וזרות, ואת עוצמת המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות סופיות. אף כי שני עקרונות אלו אינטואיטיביים מאוד, יש להיזהר ולא להתבלבל ביניהם. על אף פשטותם הרבה, מאפשרים לנו כבר שני העקרונות האלה לפתור אוסף לא מבוטל של בעיות.

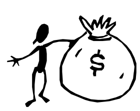
משפט 4.1.1 (עקרון הסכום): אם A,B קבוצות סופיות וזרות, אז $|A\cup B| = |A| + |B|$.
הוכחה: תהי $A = \{a_1,a_2,...,a_n\}$ ותהי $B = \{b_1,b_2,...,b_m\}$. מכיוון שהקבוצות A,B זרות, אז $A\cup B = \{a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_m\}$ וכל האיברים האלה שונים. לכן $|A\cup B| = m + n = |A| + |B|$. □

מסקנה 4.1.2: אם A,B קבוצות סופיות ו- $A\subseteq B$ אז $|B\setminus A| = |B|-|A|$.
הוכחה: הקבוצות $A, B\setminus A$ זרות, ומכיוון ש- $A\subseteq B$ אז $A\cup(B\setminus A) = B$ (הוכיחו זאת!). לכן לפי עקרון הסכום $|B| = |A\cup(B\setminus A)| = |A|+|B\setminus A|$, ומכאן $|B\setminus A| = |B|-|A|$. □

דוגמה 4.1.3: בספריה יש 50 ספרים בנושא מחשבים בשפה העברית, ו- 70 ספרים בנושא מחשבים בשפה האנגלית. מכיוון שאלו קבוצות סופיות וזרות זו לזו, אז סה"כ מספר הספרים בנושא מחשבים הוא $50 + 70 = 120$.

משפט 4.1.4 (עקרון המכפלה): אם A,B קבוצות סופיות, אז $|A\times B| = |A|\cdot|B|$.
הוכחה: תהי $A = \{a_1,a_2,...,a_n\}$ ותהי $B = \{b_1,b_2,...,b_m\}$. לכן,
$$A\times B = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),...,(a_1,b_m),\ (a_2,b_1),(a_2,b_2),...,(a_2,b_m),...,(a_n,b_1),(a_n,b_2),...,(a_n,b_m)\},$$
וכל האיברים האלה שונים. מכאן $|A\times B| = n\cdot m = |A|\cdot|B|$. □

דוגמה 4.1.5: בחנות תכשיטים גדולה יש 4 דלתות ו- 8 חלונות. פורץ החליט שעליו להיכנס לחנות דרך חלון ולצאת דרך אחת הדלתות. בכמה דרכים שונות הוא יכול לעשות זאת?



נסמן ב- A את קבוצת החלונות השונים וב- B את קבוצת הדלתות השונות. ניתן לסמן את מסלול הפורץ על ידי זוג סדור (a,b) כאשר $a\in A,\ b\in B$. דהיינו, זוג סדור כזה מייצג את החלון שדרכו

נכנס הפורץ והדלת שדרכה יצא. לכן מספר המסלולים השונים העומדים בפני הפורץ הוא כמספר הזוגות הסדורים השונים, כלומר $|A\times B| = 4\cdot 8 = 32$.

לעתים אנו מעוניינים לחשב את עוצמתה של קבוצה R החלקית לקבוצת המכפלה הקרטזית $A\times B$. במקרים אלה ההרחבה הבאה של עקרון המכפלה יכולה להיות שימושית.

משפט 4.1.6: תהיינה A,B קבוצות סופיות ותהי $R\subseteq A\times B$ (ניתן לחשוב על R כעל יחס בינארי מ- A ל- B).

1. אם קיים מספר טבעי s כך שלכל $a\in A$ מתקיים $|\{b \mid b\in B, (a,b)\in R\}| = s$, אז $|R| = |A|\cdot s$.
2. אם קיים מספר טבעי t כך שלכל $b\in B$ מתקיים $|\{a \mid a\in A, (a,b)\in R\}| = t$, אז $|R| = t\cdot|B|$.

הוכחה: תהי $A = \{a_1,a_2,...,a_n\}$ ותהי $B = \{b_1,b_2,...,b_m\}$. נייצג את הזוגות הסדורים השייכים לקבוצה R בטבלה (מטריצה) של 0 ו- 1 הכוללת n שורות ו- m עמודות (ראו סעיף 1.3). נרשום 1 במשבצת הנמצאת בשורה ה- i ובעמודה ה- j, אם $(a_i,b_j)\in R$, אחרת נרשום 0. לכן הטבלה תיראה כך:

	b_1	b_2	b_3	...	b_m
a_1	1	0	0	1	0
a_2	0	1	0	0	1
a_3	0	1	1	0	0
$\vdots$	1	0	0	1	0
a_n	0	0	1	0	1

תנאי 1 של המשפט אומר שבכל שורה בטבלה יש בדיוק s אחדים. לכן מספר האחדים בכל הטבלה שווה למספר השורות כפול s, כלומר ל- $|A|\cdot s$. אבל האחדים שבטבלה מייצגים בדיוק את איברי R, ולכן $|R| = |A|\cdot s$ כנדרש. ההוכחה של חלק 2 זהה בחילופי שורות ועמודות. □

שימו לב, שמשפט זה מהווה הרחבה לעקרון המכפלה, כי אם $R = A\times B$, אז התנאי מתקיים עבור $t = |A|$ או $s = |B|$.

דוגמה 4.1.7: בשכונה מסמנים כל בית על ידי 2 אותיות. בכמה דרכים שונות אפשר לסמן בית אם:

א. אסור שאות תחזור על עצמה באותו סימון?

ב. מותר לחזור על אות באותו סימון?

תהי A קבוצת האותיות היכולות לשמש בתור האות הראשונה בסימון, ותהי B קבוצת האותיות המותרות עבור האות השניה בסימון. כלומר, A = B = {א, ב,...,ש, ת}, ולכן $|A| = |B| = 22$. נתייחס לכל סימון של בית כאל זוג סדור (a,b) כאשר $a\in A,\ b\in B$, ותהי $R\subseteq A\times B$ קבוצת כל הזוגות המהווים סימון חוקי.

א. במקרה זה, לכל אות $a\in A$, מתקיים $|\{b| b\in B, (a,b)\in R\}| = 21$, כי הסימון $(a,a)\notin R$, אך כל סימון אחר (a,b) כש- $a \neq b$ הוא מותר. לכן לפי משפט 4.1.6, מספר הסימונים החוקיים הוא $|R| = |A|\cdot 21 = 22\cdot 21 = 462$.

ב. במקרה זה, $R = A\times B$ ולכן מספר הסימונים החוקיים הוא $|R| = |A|\cdot|B| = 22\cdot 22 = 484$.

דוגמה 4.1.8: ברצוננו לפתור את שתי הבעיות הבאות:
א. כמה מספרים אי-זוגיים יש בין 0 ל- 99?
ב. כמה מספרים אי-זוגיים יש בין 0 ל- 99 עם ספרות שונות?
שיטת הייצוג העשרונית רואה כל מספר כזוג סדור (ספרת אחדות, ספרת עשרות). כך למשל, המספר 0 יסומן על ידי הזוג $(0,0)$, המספר 9 על ידי $(0,9)$ והמספר 13 על ידי $(1,3)$.
תהי A קבוצת ספרות האחדות האפשריות ו- B קבוצת ספרות העשרות. לכן, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ואילו $B = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$. תהי $R\subseteq B\times A$ קבוצת המספרים החוקיים.
א. במקרה זה $R = B\times A$, ולכן $|R| = |B|\cdot|A| = 10\cdot 5 = 50$.
ב. במקרה זה, לכל ספרה $a\in A$ מתקיים $|\{b \mid b\in B, (b,a)\in R\}| = 9$, ולכן $|R| = |A|\cdot 9 = 5\cdot 9 = 45$.

שימו לב שבמקרה ב׳ יש אסימטריה מסוימת בין A ל- B, שכן לא קיים מספר טבעי t כך שלכל ספרה $b\in B$ מתקיים $|\{a \mid a\in A, (b,a)\in R\}| = t$. וזאת מכיוון שאם $b\in B$ ספרה זוגית אז:
$$|\{a \mid a\in A, (b,a)\in R\}| = 5$$
ואם $b\in B$ ספרה אי-זוגית אז:
$$|\{a \mid a\in A, (b,a)\in R\}| = 4.$$
לכן, חשוב להשתמש במשפט 4.1.6 בזהירות רבה!

דוגמה 4.1.9: בכיתה יש 32 בנים. כל בן מכיר 5 בנות וכל בת מכירה 8 בנים, כאשר היכרות היא הדדית. כמה בנות יש בכיתה?
תהי $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ קבוצת הבנות, ותהי $B = \{b_1, b_2, ..., b_{32}\}$ קבוצת הבנים. תהי $R \subseteq G\times B$ קבוצת הזוגות של כל הבנים והבנות שמכירים זה את זה. נייצג את R בעזרת מטריצה שבה n שורות ו- 32 עמודות, ונרשום 1 במשבצת הנמצאת בשורה ה- i ובעמודה ה- j אם בת מספר i ובן מספר j מכירים. אחרת נרשום 0 במשבצת זו. המטריצה המתקבלת תיראה כך:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	…	b_{32}
g_1	1	0	1	0	1		1
g_2	0	1	1	0	1		1
g_3	1	1	0	1	0		1
g_4	0	1	1	1	1		0
g_5	1	1	0	1	0		0
⋮							
g_n	1	0	1	1	1		0

בכל שורה במטריצה יש 8 אחדים (כי כל בת מכירה 8 בנים) ובכל עמודה יש 5 אחדים (כי כל בן מכיר 5 בנות). מכאן בדומה להוכחת משפט 4.1.6, מספר האחדים הכולל בטבלה הוא $|R| = |B|\cdot 5 = |G|\cdot 8$. לכן, $|G| = |B|\cdot 5/8 = 32\cdot 5/8 = 20$, כלומר יש 20 בנות.

אפשר להרחיב בצורה קלה ומיידית את עקרון הסכום ואת עקרון המכפלה לחישוב עוצמת האיחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות וזרות זו לזו, או לחישוב עוצמת המכפלה הקרטזית של מספר סופי של קבוצות סופיות.

משפט 4.1.10 (עקרון הסכום המורחב): תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות סופיות וזרות זו לזו. אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i|.$$

הוכחה: באינדוקציה על n. □

מסקנה 4.1.11: לכל שתי קבוצות סופיות A,B מתקיים $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

הוכחה: הקבוצות $A\backslash B,\ B\backslash A,\ A\cap B$ זרות זו לזו ואיחודן הוא $A\cup B$. על פי עקרון הסכום המורחב נקבל:

$$|A\cup B| = |(A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A\cap B)| = |A\backslash B| + |B\backslash A| + |A\cap B|.$$

על ידי שימוש במסקנה 4.1.2 מתקיים:

$$|A\backslash B| = |A \backslash (A\cap B)| = |A| - |A\cap B|,$$
$$|B\backslash A| = |B \backslash (A\cap B)| = |B| - |A\cap B|,$$

כי $A\cap B \subseteq A$, $A\cap B \subseteq B$. לכן,

$$|A\cup B| = |A\backslash B| + |B\backslash A| + |A\cap B| = |A| - |A\cap B| + |B| - |A\cap B| + |A\cap B| = |A| + |B| - |A\cap B|.\ \square$$

בסעיף 4.6 העוסק בעקרון ההכלה וההדחה נדון בהרחבה משמעותית של תוצאה זו.

משפט 4.1.12 (עקרון המכפלה המורחב): תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות סופיות. אז:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n}|A_i|.$$

הוכחה: באינדוקציה על n. □

דוגמה 4.1.13: סיסמת משתמש במחשב מסוים בנויה מחמישה תווים, הכוללים 2 אותיות באנגלית ואח"כ 3 ספרות. כמה סיסמאות שונות יש?

נסמן ב-A_i את קבוצת התווים שאפשר להציב במקום ה- i בסיסמה, עבור $i = 1,2,3,4,5$. ניתן לזהות כל סיסמה עם חמישייה סדורה (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) כאשר $a_i\in A_i$ לכל $1\le i \le n$. מכאן מספר הסיסמאות האפשריות הוא כמספר החמישיות הסדורות השונות, כלומר:

$$|A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5| = |A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|\cdot|A_4|\cdot|A_5| = 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10.$$

דוגמה 4.1.14 (ייצוג קבוצה על ידי סדרה של 0,1): תהי $A = \{1, 2, ..., n\}$. מהו מספר התת-קבוצות של A?

אמנם ענינו כבר על שאלה זו במשפט 3.1.4, אולם נראה כעת דרך הוכחה שונה לעובדה בסיסית זו. נייצג תת-קבוצה $X\subseteq A$ על ידי n-יה סדורה $(a_1, a_2, ..., a_n)$ כאשר $a_i\in\{0,1\}$, אם $a_i = 1$ פירוש הדבר ש- $i\in X$, ואם $a_i = 0$ פירושו ש- $i\notin X$.

כך למשל, אם $A = \{1,2,3,4\}$ אז הסדרה $(1,0,0,1)$ מייצגת את התת-קבוצה $\{1,4\}$.

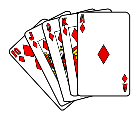
לכן מספר התת-קבוצות הוא כמספר ה- n -יות הסדורות, ומספר זה לפי עקרון המכפלה המורחב הוא

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n .$$

תרגילים

1. במדעי המחשב, בית (Byte) הוא יחידת זיכרון הבנויה מ- 8 סיביות (bit), כאשר כל סיבית יכולה להיות 0 או 1. כלומר זו סדרה באורך 8 של 0 ו- 1.
   א. כמה Bytes שונים יש?
   ב. כמה Bytes שונים יש שמתחילים ב- 1 ומסתיימים ב- 101?
   ג. כמה Bytes שונים יש שמתחילים ב- 1 ולא מסתיימים ב- 101?

2. בחפיסת קלפים יש 52 קלפים (13 מכל סוג - עלה, תלתן, לב, יהלום. 26 מכל צבע - שחור ואדום). בכמה דרכים שונות אפשר לבחור:
   א. מלך ומלכה (שני קלפים).
   ב. מלך או מלכה (קלף אחד).
   ג. מלך וקלף אדום (שני קלפים).
   ד. מלך או קלף אדום (קלף אחד).



3. תהי $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ותהי $S \subseteq P(A)$ משפחה של תת-קבוצות של A.
   א. נתון שבכל קבוצה ב- S יש 4 איברים וכל איבר של A שייך ל- 3 קבוצות ב-S. כמה קבוצות יש ב- S?
   ב. האם ייתכן שבכל קבוצה ב- S יש 3 איברים וכל איבר של A שייך ל- 5 קבוצות ב- S?

4. תהיינה f_1,f_2 שתי פונקציות שמוגדרות על אותו תחום. נאמר שהפונקציות f_1,f_2 שונות, אם **קיים** איבר x בתחום שעבורו $f_1(x) \neq f_2(x)$.
   א. מה מספר הפונקציות החח"ע השונות $f:\{1,2,3,...,m\} \rightarrow \{1,2,3,...,n\}$?
   ב. מה מספר הפונקציות השונות $f:\{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$?
   (אלה פונקציות שמתאימות לכל סדרה באורך m של 0,1 סדרה באורך n של 0,1).

5. תהי S קבוצה סופית, $|S| = n$. כמה יחסים בינאריים שונים יש על S?

4.2. בעיות מניה בסיסיות

הנושאים שיוצגו: *בחירה עם חזרות ובלי חזרות, כשהסדר חשוב ואינו חשוב, מולטי-קבוצה, תמורות (פרמוטציות).*

בסעיף זה נדון בבעיית מניה בסיסית שפתרונה יאפשר לנו לטפל בבעיות מניה רבות ומגוונות.

נרצה לברר את מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n\}$. כדי להגדיר את השאלה באופן מלא, יש צורך לקבוע האם:

1. מותר או אסור לבחור אותו איבר מספר פעמים.
2. סדר הבחירה של האיברים חשוב או לא.

השאלה הבסיסית צופנת בחובה לכן ארבע שאלות כמפורט בטבלה הבאה.

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר	מספר ה- k-יות הסדורות שאיבריהן מתוך $\{1,2,...,n\}$ ללא חזרה על אותו איבר.	מספר ה- k-יות הסדורות שאיבריהן מתוך $\{1,2,...,n\}$.
אין חשיבות לסדר	מספר התת-קבוצות מעוצמה k מתוך $\{1,2,...,n\}$.	מספר המולטי-קבוצות מעוצמה k מתוך $\{1,2,...,n\}$.

כאשר אנו מדברים על בחירה שבה הסדר חשוב, מדובר למעשה במנייה של סדרות. כאשר הסדר אינו חשוב, מדובר בספירה של תת-קבוצות או **במולטי-קבוצות** (מולטי-קבוצה היא הרחבה של מושג הקבוצה המאפשרת לאיברים להופיע מספר פעמים).
אחת ממטרותינו העיקריות בסעיף זה היא לתת פתרונות מפורשים לכל אחת מהבעיות המופיעות בטבלה לעיל. נפתח בפתרון הבעיה כשסדר בחירת האיברים חשוב.

משפט 4.2.1 (בחירה עם חזרות כשהסדר חשוב): תהי A קבוצה, $|A| = n$, ויהי $k \in \mathbb{N}$. מספר הסדרות באורך k שניתן לבנות מאיברי A הוא n^k.

הוכחה: אוסף הסדרות באורך k הוא בדיוק הקבוצה $A^k = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{k}$. לכן, לפי עקרון המכפלה המורחב (משפט 4.1.12) נקבל: $|A^k| = |A|^k = n^k$. □

דוגמה 4.2.2: נדגים את המשפט האחרון בעזרת מנייה של טפסי טוטו כפי שתואר בהקדמה לפרק זה. כזכור, בטופס טוטו יש 16 משחקים. כל משחק יכול להסתיים ב- 3 תוצאות אפשריות: ניצחון של הקבוצה המארחת, הפסד או תיקו. מסמנים זאת בטופס באחד משלושת הסימונים $A = \{1, 2, \times\}$. לכן, טור בטופס טוטו הוא סדרה באורך 16 הבנויה מאיברי A כשמותרות חזרות. מכאן, מספר הסדרות השונות הוא 3^{16}, כלומר יש $3^{16} = 43{,}046{,}721$ דרכים שונות למלא טור בטופס טוטו.

נעבור כעת לבחירה ללא חזרות כשסדר הבחירה חשוב, ונפתח תחילה במקרה פרטי שבו אנו מונים את מספר הסדרות באורך n שאיבריהן מתוך $\{1, 2, ... , n\}$.

הגדרה 4.2.3: תהי A קבוצה, $|A| = n$. סדרה באורך n ללא חזרות של איברי A (דהיינו, כל איבר של A מופיע פעם אחת בדיוק) נקראת **תמורה (פרמוטציה)** של A.

כך למשל, אם $A = \{1,2,3\}$ אז התמורות האפשריות השונות של A הן:

$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$.

הגדרה 4.2.4: המכפלה $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ מסומנת על ידי $n!$ ונקראת **n עצרת**. נגדיר גם $0! = 1$.

משפט 4.2.5: מספר התמורות של הקבוצה $\{1, 2, ..., n\}$ הוא $n!$.

הוכחה: כל תמורה של $\{1,2,...,n\}$ היא כאמור סדרה באורך n שבה מופיע כל אחד מאיברי הקבוצה. את האיבר הראשון בסדרה אפשר לבחור ב- n דרכים, את האיבר השני אפשר לבחור ב- $(n-1)$ דרכים, כיוון שאפשר לבחור כל איבר למעט האיבר שנבחר ראשון. בצורה דומה אפשר לבחור את השלישי ב- $(n-2)$ דרכים וכך הלאה. את האיבר ה- n בסדרה אפשר לבחור בדרך אחת בלבד (האיבר היחיד שנותר לאחר שבחרנו כבר את $n-1$ איברי הסדרה הקודמים). מספר התמורות הכולל יהיה לכן $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n = n!$ (למעשה השתמשנו כאן בגרסה מורחבת עוד יותר של עקרון המכפלה המורחב.) □

דוגמה 4.2.6: 11 שחקני קבוצת הכדורגל "הפועל נחליאל" רוצים להסתדר לצילום קבוצתי לרגל ניצחונם הראשון אי פעם. בכמה אופנים הם יכולים להסתדר **בשורה** לפני הצלם?

התשובה היא $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot11 = 11!$, כיוון שכל סידור שלהם הוא תמורה של 11 שחקני הקבוצה.

ניתן לחשוב על תמורות גם באופן אחר שיועיל לנו מאוד בהמשך (למשל בפרק 9 העוסק בתורת החבורות).

משפט 4.2.7: מספר הפונקציות החח"ע מהקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ לעצמה הוא $n!$.

הוכחה: תהי $\pi:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ פונקציה חח"ע. נייצג את הפונקציה π באמצעות הסדרה $(\pi(1), \pi(2), \ldots,\pi(n))$. בסדרה זו מופיע כל אחד מהאיברים של הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ בדיוק פעם אחת כי π חח"ע. כפי שראינו מספרן של הסדרות הנ"ל הוא $n!$. □

בהמשך יהיה לנו נוח לזהות זיהוי מלא בין תמורות לבין פונקציות חח"ע כנ"ל, ונציין פונקציה חח"ע π מהקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ לעצמה על ידי הסדרה $(\pi(1), \pi(2), \ldots,\pi(n))$. אנו נקרא לפונקציה חח"ע כנ"ל גם תמורה של $\{1,2,\ldots,n\}$. כך למשל, אם $n = 3$ אז הסדרה $(1,3,2)$ מתאימה לתמורה (לפונקציה) π המוגדרת על ידי $\pi(1) = 1, \pi(2) = 3, \pi(3) = 2$.

כעת נעבור למקרה הכללי של בחירה ללא חזרות כשסדר הבחירה חשוב.

משפט 4.2.8 (בחירה ללא חזרות כשהסדר חשוב): תהי A קבוצה, $|A| = n$, ויהי $0 \le k \le n$. מספר הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מאיברי A הוא:

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

הוכחה: נשוב ונשתמש בעקרון המכפלה המורחב. רעיון ההוכחה הוא שאת האיבר הראשון בסדרה באורך k אפשר לבחור ב- n דרכים, את האיבר השני אפשר לבחור ב- $(n-1)$ דרכים, כיוון שאפשר לבחור כל איבר למעט האיבר שנבחר ראשון. בצורה דומה אפשר לבחור את השלישי

ב- $(n-2)$ דרכים וכך הלאה. ואילו את האיבר ה- k אפשר לבחור ב- $(n-k+1)$ דרכים. העובדה כי $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ נובעת מהגדרת העצרת (בדקו). □

את ההוכחה שתוארה לעיל ניתן לרשום במדויק בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית (ראו תרגיל 11).

דוגמה 4.2.9: כמה מילים בנות 4 אותיות ניתן לבנות מאותיות הא״ב האנגלי, כשאסור שבמילה אחת תופיע אותה אות יותר מפעם אחת?
תהי $A=\{a,b,c,\ldots,z\}$. מספר המילים החוקיות הוא כמספר הרביעיות הסדורות שניתן לבנות מאיברי A ללא חזרות, ומספר זה הוא $\frac{26!}{22!}=26\cdot25\cdot24\cdot23=358{,}800$.

כאשר מדובר בבחירה שבה סדר בחירת האיברים אינו חשוב, מדובר כאמור במניית קבוצות ומולטי-קבוצות. נפתח במקרה הראשון של מניית קבוצות.

משפט 4.2.10 (בחירה ללא חזרות כשהסדר אינו חשוב): תהי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $0\le k\le n$.
מספר התת-קבוצות של A בגודל k הוא $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

הוכחה: נתבונן באוסף כל הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מאיברי A. לפי משפט 4.2.8, מספר הסדרות האלה הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$. בהינתן סדרה כזאת, נביט בקבוצה של k האיברים המופיעים בה. כך, למשל, אם $A=\{1,2,3,4,5\}$ ו- $k=3$ ונתונה לנו הסדרה $(2,1,5)$ נייחס לה את הקבוצה $\{1,2,5\}$ וכו׳. בטבלה הבאה אפשר לראות את ההתאמה המלאה עבור דוגמה זו.

קבוצה	סדרות מתאימות
$\{1, 2, 3\}$	(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)
$\{1, 2, 4\}$	(1,2,4), (1,4,2), (2,1,4), (2,4,1), (4,1,2), (4,2,1)
$\{1, 2, 5\}$	(1,2,5), (1,5,2), (2,1,5,), (2,5,1), (5,1,2), (5,2,1)
$\{1, 3, 4\}$	(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1)
$\{1, 3, 5\}$	(1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1)
$\{1, 4, 5\}$	(1,4,5), (1,5,4), (4,1,5), (4,5,1), (5,1,4), (5,4,1)
$\{2, 3, 4\}$	(2,3,4), (2,4,3), (3,2,4), (3,4,2), (4,2,3), (4,3,2)
$\{2, 3, 5\}$	(2,3,5), (2,5,3), (3,2,5), (3,5,2), (5,2,3), (5,3,2)
$\{2, 4, 5\}$	(2,4,5), (2,5,4), (4,2,5), (4,5,2), (5,2,4), (5,4,2)
$\{3, 4, 5\}$	(3,4,5), (3,5,4), (4,3,5), (4,5,3), (5,3,4), (5,4,3)

ברור שיש סדרות שונות שלהן נתאים אותה הקבוצה, היינו סדרות המהוות סידורים שונים (תמורות) של אותה הקבוצה. כזכור, לקבוצה בת k איברים יש $k!$ תמורות (משפט 4.2.5), ולכן כל

קבוצה מגודל k תיספר כאן !k פעמים. מכאן, $\frac{n!}{(n-k)!}$ הסדרות מאורך k מתקבצות ל- $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ קבוצות שונות בגודל k. □

הגדרה 4.2.11: המספר $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, כאשר $0 \le k \le n$, נקרא **מקדם בינומי** ומסומן על ידי

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

דוגמה 4.2.12: בכמה דרכים אפשר למלא טופס לוטו?
בטופס לוטו יש לבחור 6 מספרים שונים כלשהם מתוך המספרים $\{1,2,3,...,45\}$. מספר הבחירות האפשריות הוא לכן $\binom{45}{6} = \frac{45!}{6!39!} = \frac{40\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 8{,}145{,}060$.

דוגמה 4.2.13: בכיתה יש 4 בנות ו- 9 בנים. בכמה דרכים אפשר לבחור ועד מתוך ילדי הכיתה שיכלול שתי בנות ושלושה בנים?

מספר הדרכים לבחור שתי בנות הוא $\binom{4}{2}$, וזאת מכיוון שסדר הבנות שנבחרו אינו חשוב (אלא רק אילו בנות נבחרו) וצריך לבחור שתי בנות שונות זו מזו. באותו אופן מספר הדרכים לבחור שלושה בנים הוא $\binom{9}{3}$. לכן לפי עקרון המכפלה, מספר הדרכים לבחור ועד הוא

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{9}{3} = 6\cdot 84 = 504.$$

דוגמה 4.2.14: נחזור אל קבוצת הכדורגל המהוללת "הפועל נחליאלי" שפגשנו בדוגמה 4.2.6. הפעם רוצים 11 השחקנים להצטלם בשתי שורות, כאשר 6 שחקנים עומדים מאחור ו- 5 שחקנים מלפנים, ובנוסף השוער צריך לעמוד במרכזה של השורה הקדמית. בכמה אופנים הם יכולים להסתדר כעת לפני הצלם?
עלינו לבחור 6 שחקנים מתוך 10 שיעמדו בשורה האחורית (השוער עומד בוודאות בשורה הקדמית). זאת אפשר לעשות ב- $\binom{10}{6}$ דרכים. את שישה השחקנים שנבחרו לעמוד מאחור אפשר לסדר בשורה ב- !6 דרכים. את ארבעת השחקנים הנותרים (פרט לשוער) אפשר לסדר בשורה הקדמית ב- !4 דרכים. לכל סידור כזה נצרף את השוער ונעמיד אותו במרכז השורה. כעת

נשתמש בעקרון המכפלה ונקבל שמספר הדרכים הכולל לסדר את השחקנים כנדרש הוא $\binom{10}{6}\cdot 6!\cdot 4! = 10!$.

למעשה אפשר היה לפתור את הבעיה גם בדרך אחרת, על ידי כך שנתייחס אל שתי השורות, הקדמית והאחורית, כאל שורה אחת ארוכה ש"קופלה" לאחר 6 שחקנים, כאשר השוער עומד במקום ה- 9 בשורה הזאת (אם מונים את השחקנים החל מהשורה האחורית). מכיוון שמקומו של השוער קבוע, הרי עלינו לסדר את 10 השחקנים הנותרים בשורה ארוכה "מקופלת", ומספר הדרכים לעשות זאת הוא כמובן $10!$.

טענה 4.2.15: מספר הסדרות הבנויות מ- s אפסים ו- t אחדים הוא $\binom{s+t}{s}$.

הוכחה: לסדרה כזאת יש אורך כולל של $s + t$, והיא מוגדרת חד-ערכית על ידי קבוצת s המקומות שבהם מופיעים אפסים (כי ביתר t המקומות חייבים להופיע אחדים). לכן עלינו למצוא בכמה דרכים אפשר לבחור s מקומות מתוך $s + t$ (כמובן שאין חשיבות לסדר שבו נבחרים המקומות). מספר התת-קבוצות בגודל s של קבוצת המקומות שגודלה הוא $s + t$ יהיה $\binom{s+t}{s}$ על פי משפט 4.2.10. □

משפט 4.2.16 (בחירה עם חזרות כשהסדר חשוב): תהי A קבוצה, $|A| = n$. מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך איברי A כשמותרות חזרות בבחירה והסדר אינו חשוב, הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

הוכחה: נניח ש- $A = \{1,2,3,...,n\}$. איך נתאר את קבוצת הבחירות החוקיות?
מכיוון שהסדר אינו חשוב ומותרות חזרות, בחירה חוקית ניתנת לתיאור מלא על ידי ציון מספר הפעמים שבהן נבחר כל אחד מהאיברים של A. נסמן ב- x_i את מספר הפעמים שבהן נבחר האיבר $i\in A$. המספרים x_i צריכים כמובן לקיים את שני התנאים הבאים:
א. $x_i \geq 0$ עבור כל $i\in A$.
ב. סכומם הוא k, כלומר $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$.
נתבונן למשל בבחירה חוקית כלשהי:

$$\underbrace{1,1,\dots,1}_{x_1}\ \ \underbrace{2,2,\dots,2}_{x_2}\ \ \cdots\ \ \underbrace{n,n,\dots,n}_{x_n}.$$

כפי שניתן לראות בחירה זאת מיוצגת על ידי n גושים של מספרים (חלקם יכולים להיות גושים באורך 0). נתאר את הבחירה לכן על ידי n גושים של $\otimes$ שאורכם הכולל הוא k, ובין כל שני גושים יש קו מפריד, כי מיקומו של גוש מגדיר באופן יחיד את האיבר שמיוצג על ידי גוש זה, ואורכו של גוש מגדיר את מספר הפעמים שהאיבר נבחר. ההבדל בין שתי בחירות חוקיות יהיה במיקום הקווים המפרידים.
כך לדוגמה תהי $A = \{1,2,3,4\}$, $k = 5$.
בחירה אפשרית אחת היא $\otimes\otimes\ |\ \otimes\ |\ |\ \otimes\otimes$, דהיינו בחרנו את 1 פעמיים, את 2 פעם אחת, את 3 לא בחרנו, את 4 בחרנו פעמיים.

בחירה אפשרית אחרת היא $\otimes \mid \otimes\otimes \mid \otimes \mid \otimes$ שבה בחרנו את 1 פעם אחת, את 2 פעם אחת, את 3 פעמיים ואת 4 פעם אחת.

ועוד דוגמה: $\mid \mid \otimes\otimes\otimes \mid \otimes\otimes$. כאן 1 לא נבחר, גם 2 לא נבחר, את 3 בחרנו שלוש פעמים, ו- 4 נבחר פעמיים.

הגדרנו אם כן, פונקציה חח״ע ועל בין קבוצת הבחירות החוקיות לבין קבוצת הסדרות באורך $(k+n-1)$ הבנויות מ- k סימני $\otimes$ ו- $(n-1)$ קווים מפרידים. לפי טענה 4.2.15 מספרן של אלה הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$. □

דוגמה 4.2.17: כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $x_1+x_2+...+x_n = k$?

נראה פונקציה חח״ע ועל בין פתרונות חוקיים של משוואה זו לבין קבוצת כל הבחירות של k איברים מתוך קבוצה $A = \{1,2,...,n\}$, כשסדר הבחירה אינו חשוב ומותרות חזרות.

בהינתן פתרון כלשהו $(x_1,x_2,...,x_n)$ למשוואה, תתאים לו הפונקציה את הבחירה שבה האיבר $i\in A$ נבחר x_i פעמים לכל $1 \le i \le n$ (בדומה לדרך שבה הוכחנו את המשפט האחרון). פונקציה זו חח״ע ועל (בדקו!), ולכן מספר הפתרונות הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

דוגמה 4.2.18: כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש לאי-שוויון $x_1+x_2+...+x_n \le k$?

נגדיר משתנה חדש y ונהפוך את אי-השוויון לשוויון $x_1+x_2+...+x_n + y = k$. המשתנה y הוא מעין משתנה ״חוסר״ שמתאר את ההפרש בין סכום ה- x_i לבין k.

קיבלנו משוואה ב-$(n+1)$ משתנים. מכל פתרון של המשוואה ניתן מיד לקבל פתרון של האי-שוויון (פשוט מתעלמים מ- y). ולהיפך, בהינתן פתרון כלשהו של האי-שוויון נגדיר $y = k-(x_1+x_2+...+x_n)$ ונקבל פתרון למשוואה. כלומר יש פונקציה חח״ע ועל בין פתרונות של האי-שוויון לבין פתרונות של המשוואה, ולכן מספר הפתרונות של האי-שוויון הוא $\binom{n+k}{n}$.

דוגמה 4.2.19: במכללה כלשהי לומדים לתואר במדעי המחשב במשך ארבע שנים.

א. בכמה דרכים אפשר לבחור ועד של 10 תלמידים לייצוג תלמידי מדעי המחשב, כאשר מה שחשוב הוא כמה נציגים נבחרו מכל מחזור ולא אלו תלמידים נבחרו?

ב. בכמה דרכים אפשר לבחור את הוועד כך שייבחר לפחות תלמיד אחד משנה א׳, לפחות תלמיד אחד משנה ב׳, לפחות שני תלמידים משנה ג׳ ולפחות שני תלמידים משנה ד׳?

נסמן ב- x_1, x_2, x_3, x_4 את מספר התלמידים שנבחרו מכל מחזור. לכן:

א. במקרה זה עלינו למצוא את מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$. על פי דוגמה 4.2.17, מספר הפתרונות הוא $\binom{13}{3} = 286$.

ב. במקרה זה צריך להתקיים: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$ כאשר $x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 1,\ x_3 \ge 2,\ x_4 \ge 2$.

נגדיר משתנים חדשים $y_1 = x_1+1,\ y_2 = x_2 + 1,\ y_3 = x_3 + 2,\ y_4 = x_4 + 2$. מספר הדרכים לבחור את הוועד הוא כמספר הפתרונות השלמים האי-שליליים y_1, y_2, y_3, y_4 למשוואה $y_1+y_2+y_3+y_4 = 4$. מספר זה הוא $\binom{7}{3} = 35$.

לסיכום סעיף זה, הראינו שמספר הדרכים לבחור k איברים מתוך n איברים הוא:

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$

הערה חשובה: בסעיף זה ראינו כמה פעמים את השימוש בפונקציות חח״ע ועל כדרך לפתרון בעיות מניה. כזכור במשפט 1.5.7 הוכחנו שאם קיימת פונקציה חח״ע ועל בין שתי קבוצות אז עוצמתן שווה. אנו נשתמש בשיטה זו לאורך כל הספר. בהינתן קבוצה כלשהי שאת איבריה נרצה למנות, נמצא פעמים רבות פונקציה חח״ע ועל בינה לבין קבוצה אחרת שאת עוצמתה אנחנו כבר יודעים, וכאמור נוכל להסיק אז שעוצמת הקבוצות שווה. נדגיש שלא די למצוא פונקציה כזו, אלא יש להוכיח כמובן בצורה מלאה ומדויקת שהיא אכן חח״ע ועל.

תרגילים

1. א. בכמה דרכים אפשר לסדר n אנשים סביב שולחן עגול?
   ב. בכמה דרכים אפשר להושיב n גברים ו- n נשים סביב שולחן עגול, כך שלא יישבו שתי נשים זו ליד זו או שני גברים זה ליד זה.
   הערה: שני סידורים נחשבים זהים אם אחד מתקבל מהשני על ידי סיבוב השולחן.

2. א. נתונים n אחדים ו- m אפסים. הראו שמספר הדרכים לסדר אותם בשורה, כך שאין שני אחדים סמוכים הוא $\binom{m+1}{n}$.
   ב. בכמה דרכים אפשר לבחור r מספרים שונים מתוך $\{1,2,...,n\}$ כך שלא יהיו שני מספרים עוקבים?

3. מה מספר הדרכים להושיב 14 אנשים כך ש:
   א. 8 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והיתר סביב שולחן עגול אחר?
   ב. 8 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והיתר על ספסל?

4. מטילים n קוביות זהות, כאשר על כל קוביה מופיעים כל המספרים בין 1 ל- 6. התוצאה של הטלה כזאת היא המספרים שהתקבלו, כאשר לא משנה הסדר שבו הם התקבלו, אולם חשוב כמה פעמים התקבל כל מספר. כמה תוצאות שונות ייתכנו?

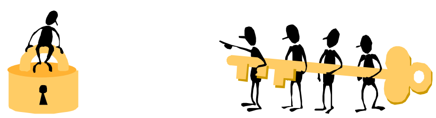
5. בכמה דרכים אפשר להרכיב ועדה של שני גברים ושלוש נשים מתוך קבוצה של ארבעה גברים ושש נשים, כאשר יש זוג אחד (גבר ואישה) שאינם מוכנים להיות בוועדה ביחד?

6. קרן מלגות מעונינת לחלק מלגות ל- 10 סטודנטים בערך כולל של 10,000 ש״ח. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, אם גובה כל מלגה הוא מספר שלם חיובי ממש של ש״ח? ומה אם כל מלגה חייבת להיות כפולה שלמה של 100 ש״ח?

7. יוסי ומשה שייכים למשלחת של 12 איש. מה מספר הדרכים לשבץ את חברי המשלחת ל- 12 חדרים הממוקמים בשורה אחת, כך שכל חבר משלחת יהיה בחדר לבד וכמו-כן:
   א. יוסי ומשה יהיו בחדרים סמוכים?
   ב. יוסי ומשה לא יהיו בחדרים סמוכים?

8. מה מספר הפתרונות למשוואה $a+b+c+d+e = 10$ כאשר כל המשתנים הם מספרים שלמים חיוביים (גדולים ממש מ-0) ובנוסף לכך a מספר שלם אי-זוגי?

9. ל- 11 אנשים בחברה מסוימת יש גישה לכספת. בעל החברה מעוניין שכל קבוצה של שישה אנשים מתוך ה- 11 תוכל לפתוח את הכספת, אבל אף קבוצה של חמישה אנשים לא תוכל לפתוח את הכספת בעצמה. כדי להשיג את המטרה הזאת הוא החליט לשים יותר ממנעול אחד על הכספת, ולחלק לכל אדם מפתחות רק לחלק מהמנעולים. כמה מנעולים עליו לשים על הכספת וכמה מפתחות יהיו לכל אדם, כדי שמטרתו תושג (ברצונו של בעל החברה להקטין ככל האפשר את מספר המנעולים, וכן להקטין ככל האפשר את מספר המפתחות שמקבל כל אדם)?



10. נתונים n תאים בשורה ו- k כדורים שיש להכניס לתאים. בכמה דרכים אפשר להכניס את הכדורים לתאים כאשר:
   א. אסור לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים שונים זה מזה?
   ב. אסור לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים זהים זה לזה?
   ג. מותר לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים שונים זה מזה?
   ד. מותר לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים זהים זה לזה?

11. הוכיחו באינדוקציה את משפט 4.2.8.

12. הוכיחו באינדוקציה שמספר התמורות של $\{1,\ldots,n\}$ הוא $n!$.

4.3. המקדמים הבינומיים

הנושאים שיוצגו: *משפט הבינום של ניוטון, זהות פסקל, משולש פסקל, סדרה אונימודלית, הוכחת זהויות קומבינטוריות בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית, מספרי קטלן, מהלכים סריגיים.*

הקוראים ודאי זוכרים מימי בית הספר את הנוסחה הפשוטה $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. חלקכם ודאי גם זוכרים את הנוסחה $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$. אולם רק מעטים מביניכם יודעים

מן הסתם בעל-פה את הנוסחה לחישוב $(a+b)^4$. נוסחת הבינום של ניוטון מראה כיצד יש לחשב בצורה שיטתית את הביטוי $(a+b)^n$ לכל מספר טבעי n.

משפט 4.3.1 (נוסחת הבינום של ניוטון): יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. אז,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

הוכחה: נחשב את הביטוי $(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$ על ידי כך שנפתח את כל הסוגריים בלי לסדר מחדש את המכפלות. למשל:

$$(a+b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$

$$(a+b)(a+b)(a+b) = a\cdot a\cdot a + a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot a + a\cdot b\cdot b + b\cdot a\cdot a + b\cdot a\cdot b + b\cdot b\cdot a + b\cdot b\cdot b$$

איך מתקבל כל אחד מהמחוברים האלה? מכל גורם $(a+b)$ במכפלה $(a+b)^n$ אנו בוחרים את a או את b. על ידי מעבר על כל הבחירות האפשריות מתקבלת רשימת מחוברים המתאימה בדיוק לרשימת כל המילים באורך n הבנויות מהאותיות a,b.
נקבץ עתה יחד את כל המחוברים שבהם k מהגורמים הם a ו- $(n-k)$ האחרים הם b. כל מחובר כזה הוא מהצורה $a^k b^{n-k}$. מספרם של המחוברים האלה שווה בדיוק לכל המילים הכוללות k פעמים a ו- $(n-k)$ פעמים b. לפי טענה 4.2.15, מספרן של מילים אלה הוא $\binom{n}{k}$, ולכן תרומתן לסכום הכולל היא $\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$. וכעת, k יכול לנוע בין 0 ל- n (החל מהמקרה שבו בוחרים את a מכל גורם $(a+b)$, ועד למצב שלא בוחרים את a כלל), ומכאן נובעת טענת המשפט. □

דוגמה 4.3.2: בעזרת נוסחת הבינום ניתן לחשב את הנוסחאות המוכרות מבית הספר. כך למשל,

$$(a+b)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^k b^{2-k}=\binom{2}{0}a^0b^2+\binom{2}{1}a^1b^1+\binom{2}{2}a^2b^0=a^2+2ab+b^2.$$

וכאשר $n=3$ נקבל:

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^k b^{3-k}\\&=\binom{3}{0}a^0b^3+\binom{3}{1}a^1b^2+\binom{3}{2}a^2b^1+\binom{3}{3}a^3b^0\\&=a^3+3ab^2+3a^2b+b^3\end{aligned}$$

כזכור, בהינתן מספר טבעי n, המספרים $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n}$ נקראים המקדמים הבינומיים. כפי שנראה בסעיף 6.3 העוסק בפונקציות יוצרות, רצוי וגם אפשרי להרחיב את ההגדרה של המקדמים הבינומיים $\binom{n}{k}$ גם ל- n שאינו בהכרח מספר שלם. בהרחבות אלה נדון בסעיף 4.7.

נוכיח כעת מספר זהויות קומבינטוריות הקשורות למקדמים הבינומיים. ההוכחות ייעשו בשני אופנים - הוכחה **אלגברית** והוכחה **קומבינטורית**. הוכחה אלגברית היא הוכחה שבה מוכיחים את הזהות על ידי פעולות אלגבריות בלבד. הוכחה קומבינטורית מוכיחה את הזהות על ידי מתן משמעות קומבינטורית לביטויים המופיעים בזהות.

משפט 4.3.3: יהי $n \in \mathbb{N}$. אז $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

הוכחה: נציג למשפט זה שתי הוכחות. הראשונה אלגברית והשנייה קומבינטורית.

הוכחה אלגברית: נציב $a = b = 1$ בנוסחת הבינום של ניוטון. נקבל את השוויון הנדרש:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

הוכחה קומבינטורית: אגף ימין של השוויון הוא מספר התת-קבוצות של $\{1,2,\ldots,n\}$ כפי שראינו במשפט 3.1.4. לעומת זאת, מספר התת-קבוצות בגודל k של $\{1,2,\ldots,n\}$ הוא $\binom{n}{k}$, כפי שהוכח במשפט 4.2.10. לכן, אם נסכם את מספר התת-קבוצות בגודל k עבור $k = 0,1,2,\ldots,n$ נקבל את אגף שמאל. שני האגפים מציינים אם כן את מספר התת-קבוצות של הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$, ועל כן יש שוויון. □

משפט 4.3.4: יהי $n \in \mathbb{N}$. אז $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$.

הוכחה: הפעם נציג שלוש הוכחות למשפט - שתי הוכחות אלגבריות והוכחה קומבינטורית.

הוכחה אלגברית א': לפי נוסחת הבינום של ניוטון, לכל x ממשי מתקיים:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k.$$

נגזור את שני האגפים לפי x ונקבל:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1}.$$

כעת נציב $x = 1$ בשוויון האחרון ונקבל את התוצאה הדרושה.
דיון מקיף בשיטה שהוצגה כאן נערך בסעיף 6.3, העוסק בפונקציות יוצרות.

הוכחה אלגברית ב׳: קל לוודא על ידי שימוש בהגדרת המקדמים הבינומיים ש- $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. לכן,

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n\cdot 2^{n-1}$$

השוויון האחרון נובע ממשפט 4.3.3.

הוכחה קומבינטורית: נתבונן במספר הדרכים לבחור תת-קבוצות של $\{1,2,...,n\}$ שבהן איבר אחד מסומן בסימון מיוחד. כך למשל, הקבוצה $\{3,5,\hat{9},13\}$ שבה 9 מסומן, שונה מהקבוצה $\{3,\hat{5},9,13\}$ שבה 5 מסומן.

דרך אחת היא לבחור ב- $\binom{n}{k}$ דרכים את כל התת-קבוצות בגודל k. בכל תת-קבוצה כזאת אפשר לסמן כל אחד מ- k האיברים ולקבל $k\binom{n}{k}$ תת-קבוצות שונות. נסכם עבור $k = 1,2, ...,n$ ונקבל את אגף שמאל.

דרך אחרת היא לבחור ראשית ב- n דרכים את האיבר המסומן מתוך כל האיברים ב- $\{1,2,...,n\}$. כעת בוחרים את יתר האיברים שיצטרפו אל האיבר המסומן. מספר התת-קבוצות שאפשר לבחור מתוך $n-1$ איברים שנותרו הוא 2^{n-1}, כפי שראינו במשפט 3.1.4. מכאן מתקבל אגף ימין של הזהות. □

משפט 4.3.5: יהיו $n,k \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. אז $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

הוכחה: גם טענה פשוטה זו אפשר להוכיח בשתי דרכים.

הוכחה אלגברית: הטענה נובעת ישירות מההגדרה ש- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

הוכחה קומבינטורית: תהי $A = \{1,2,...,n\}$ קבוצה. נסמן ב- $C_{n,i}$ את אוסף כל התת-הקבוצות של A בגודל i, וזאת לכל $0 \le i \le n$. נציג פונקציה חח״ע ועל מ- $C_{n,k}$ ל- $C_{n,n-k}$, כלומר בין אוסף הקבוצות שעוצמתן k לאוסף הקבוצות שעוצמתן $n-k$:
לכל תת-קבוצה $B \in C_{n,k}$ נתאים את הקבוצה המשלימה לה $(A\backslash B) \in C_{n,n-k}$. זוהי פונקציה חח״ע ועל בין $C_{n,k}$ ל-$C_{n,n-k}$ (הוכיחו!), ולכן קבוצות אלו שוות עוצמה, כלומר $|C_{n,k}| = |C_{n,n-k}|$. אולם לפי משפט 4.2.10, $|C_{n,k}| = \binom{n}{k}$ ואילו $|C_{n,n-k}| = \binom{n}{n-k}$, ולכן גם $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. □

זהות פסקל ומשולש פסקל

נוכיח כעת את זהות פסקל, הנקראת כך על שם המתמטיקאי הצרפתי בלייז פסקל (ראו הערות היסטוריות בפרק זה).

משפט 4.3.6 (זהות פסקל): יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ כאשר $0\le k\le n$. אז $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

הוכחה:

הוכחה אלגברית: על פי הגדרת המקדמים הבינומיים:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\left[(n-k)+k\right]=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

הוכחה קומבינטורית: אגף ימין של הזהות מונה על פי ההגדרה את מספר התת-קבוצות בגודל k של הקבוצה $A=\{1,2,...,n\}$. נראה שגם אגף שמאל מונה זאת. ואכן ניתן לחלק את התת-קבוצות בגודל k של A לשני סוגים.

א) תת-קבוצות שכוללות את האיבר n: מספרן $\binom{n-1}{k-1}$ כי עלינו לבחור עוד $(k-1)$ איברים מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n-1\}$.

ב) תת-קבוצות שאינן כוללות את האיבר n: מספרן $\binom{n-1}{k}$ כי עלינו לבחור k איברים מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n-1\}$.

ולכן לפי עקרון הסכום מספר התת-קבוצות בגודל k הוא $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$. לכן גם אגף שמאל סופר את מספר התת-קבוצות בגודל k של A, ומכאן יש שוויון. □

בעזרת זהות פסקל ניתן לחשב משולש הידוע בשם **משולש פסקל**. זהו כלי שימושי המאפשר לחשב את המקדמים הבינומיים בדרך קלה ורקורסיבית. בקדקוד העליון של המשולש יהיה המקדם הבינומי $\binom{0}{0}=1$, בכל שורה אחרת האיבר השמאלי ביותר יהיה המקדם הבינומי $\binom{n}{0}=1$, ואילו האיבר הימני ביותר יהיה המקדם הבינומי $\binom{n}{n}=1$. כל איבר אחר במשולש הוא סכום של שני המקדמים שנמצאים בשורה מעליו משני צדיו, כפי שהוכחנו בזהות פסקל. כך למשל, אפשר לראות בתרשים 4.3.1 את חמש השורות הראשונות של משולש פסקל.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} &&&&\binom{0}{0}&&&& \\ &&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&& \\ &&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&& \\ &\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}& \\ \binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4} \end{array}$$

תרשים 4.3.1: חמש השורות הראשונות של משולש פסקל.

אם נמספר את השורות ב- $0,1,2,\ldots$ החל מהשורה העליונה, אז בשורה ה- n במשולש נמצאים המקדמים של הביטוי $(a+b)^n$. כך למשל, השורה הרביעית במשולש מכילה את המקדמים הבינומיים $\binom{4}{0},\binom{4}{1},\binom{4}{2},\binom{4}{3},\binom{4}{4}$. לכן, אם נרצה לחשב את הביטוי $(a+b)^4$ נתבונן בשורה הרביעית של משולש פסקל ונקבל תוך שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

משולש פסקל מאפשר גם לראות שיש יחס סדר בין המקדמים הבינומיים בכל שורה. המקדמים הולכים וגדלים עד לאמצע השורה ומשם הולכים וקטנים עד לסופה. כלומר המקדם $\binom{n}{n/2}$ הוא המקדם הגדול ביותר, כאשר n זוגי.

הגדרה 4.3.7: סדרה של מספרים שתחילה עולה ואח״כ יורדת נקראת **סדרה אונימודלית**.

נוכיח פורמלית שהמקדמים הבינומיים הם אכן סדרה אונימודלית.

משפט 4.3.8: יהי $n \in \mathbb{N}$.

אם n זוגי אז $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{n/2} > \binom{n}{n/2+1} > \ldots > \binom{n}{n}$.

אם n אי-זוגי אז $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2} > \ldots > \binom{n}{n}$.

הוכחה: קל לבדוק ש- $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$ לכל $0 \le k \le n$. לכן, $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ אם ורק אם $\frac{n-k+1}{k} > 1$, כלומר אם $k < (n+1)/2$. לכן המקדמים הבינומיים עולים תחילה ואח״כ יורדים כנדרש. □

משפט 4.3.9: יהיו $n,k,m \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le m \le k \le n$. אז $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.

הוכחה:

הוכחה אלגברית: השתמשו בהגדרת המקדמים הבינומיים כדי להוכיח זאת.

הוכחה קומבינטורית: נראה ששני צדי הזהות סופרים את מספר הדרכים לבחור k סטודנטים למועצה מציבור של n סטודנטים, ומתוך חברי המועצה לבחור m חברים לוועד.

דרך אחת לפתור את הבעיה היא לבחור תחילה k סטודנטים למועצה מתוך n הסטודנטים ב- $\binom{n}{k}$ דרכים, ומתוך k חברי המועצה שנבחרו לבחור m חברים לוועד ב- $\binom{k}{m}$ דרכים. על פי עקרון המכפלה מקבלים את הביטוי בצד שמאל של הזהות.

דרך שניה לפתור את הבעיה היא לבחור תחילה את m חברי הוועד מכלל הסטודנטים ב- $\binom{n}{m}$ דרכים, ואח"כ להשלים את $(k-m)$ חברי המועצה הדרושים על ידי בחירתם מבין $(n-m)$ הסטודנטים שעדיין לא נבחרו ב- $\binom{n-m}{k-m}$ דרכים. שוב לפי עקרון המכפלה נקבל את צד ימין של הזהות. לכן יש שוויון בין שני אגפי הזהות. □

משפט 4.3.10: יהיו $n,k \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. אז $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

הוכחה:

הוכחה אלגברית: נציב במשפט הבינום של ניוטון את הערכים $a = 1, b = -1$.

הוכחה קומבינטורית: עלינו להוכיח למעשה ש-

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots,$$

כלומר שמספר התת-קבוצות בגודל זוגי שווה למספר התת-קבוצות בגודל אי-זוגי של $\{1,\ldots,n\}$.

תהי $A = \{1,2,\ldots,n\}$ קבוצה כלשהי. נסמן ב- E את קבוצת כל התת-קבוצות בגודל זוגי של A, וב- O את קבוצת כל התת-קבוצות בגודל אי-זוגי של A. נגדיר פונקציה $f{:}E\to O$ על ידי:

$$f(B) = \begin{cases} B\setminus\{n\}, & n \in B \\ B\cup\{n\}, & n \notin B \end{cases}$$, לכל $B\in E$.

הפונקציה f מתאימה לכל תת-קבוצה בגודל זוגי של A תת-קבוצה בגודל אי-זוגי. קל לוודא ש- f היא פונקציה חח"ע ועל, ולכן $|E| = |O|$. □

שימו לב שההתאמה המתאימה לכל תת-קבוצה את הקבוצה המשלימה לה ב-A תיכשל כאן, כאשר n מספר זוגי. במקרה זה אם B תת-קבוצה בגודל זוגי k, אז גם הקבוצה המשלימה שגודלה $n-k$ היא בגודל זוגי.

מספרי קטלן

בסעיף 3.3 הגדרנו סדרות **מאוזנות** של סוגריים (ראו הגדרה 3.3.7). כזכור, אלה סדרות שבהן מספר הסוגריים השמאליים שווה למספר הסוגריים הימניים, וכן בכל רישא של הסדרה מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים. בסעיף זה נספור את מספר הסדרות האלה. לשם נוחות הדיון נסמן סוגריים שמאליים על ידי 0 וסוגריים ימניים על ידי 1. כך למשל, הסדרה המאוזנת ( ) (( )) תסומן על ידי 001101.

משפט 4.3.11: מספר הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו- n אחדים הוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

המספר $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ נקרא **מספר קטלן**.

הוכחה: גם לבעיה זו נציג שתי הוכחות, אך הפעם הוכחה קומבינטורית והוכחה גיאומטרית. נעיר שבעצם שתי ההוכחות זהות לחלוטין ורק מבוטאות בשתי שפות שקולות זו לזו - הקומבינטורית והגיאומטרית.

הוכחה קומבינטורית: נגדיר את הקבוצות הבאות:

S היא קבוצת כל הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו- n אחדים,

A היא קבוצת כל הסדרות שכוללות n אפסים ו- n אחדים (מאוזנות ולא מאוזנות),

B היא קבוצת כל הסדרות הלא מאוזנות שכוללות n אפסים ו- n אחדים.

ברצוננו למצוא כמובן את עוצמתה של הקבוצה S. כמובן, $S = A \setminus B$, ומכיוון ש- $B \subseteq A$ אז $|S| = |A| - |B|$ (מסקנה 4.1.2). נמצא לכן את עוצמתן של הקבוצות A ו- B.

קל לראות ש- $|A|=\binom{2n}{n}$ כי סדרה בקבוצה A נקבעת באופן יחיד על פי מיקום האפסים ואת מיקומם ניתן לבחור ב- $\binom{2n}{n}$ דרכים (טענה 4.2.15).

אולם מהי עוצמתה של הקבוצה B? כדי לחשב את |B|, נראה פונקציה חח״ע ועל $f{:}B\rightarrow C$, כאשר C היא קבוצת כל הסדרות הבנויות מ-$(n+1)$ אפסים ו-$(n-1)$ אחדים. מכאן נקבל ש- $|B| = |C|$, ומכיוון שאת עוצמתה של הקבוצה C קל לחשב, תושלם הוכחת המשפט.

ואכן $|C|=\binom{2n}{n+1}$, כי גם במקרה זה סדרה בקבוצה C נקבעת על ידי מיקום האפסים (שוב, טענה 4.2.15). בסה״כ נקבל:

$$\begin{aligned} |S| &= |A|-|B|=|A|-|C| \\ &= \binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

כנדרש. לסיום ההוכחה נגדיר את הפונקציה f.

תהי $b = (b_1,b_2,...,b_j,b_{j+1},...,b_{2n})\in B$ סדרה כלשהי, ויהי j המקום הראשון בסדרה שבו מספר האחדים עולה ממש על מספר האפסים. חייב להיות מקום כזה כי הסדרה b איננה מאוזנת. הפונקציה f תהפוך ברישא $(b_1,b_2,...,b_j)$ כל **1** ל- **0** וכל **0** ל- **1**, ואת יתר איברי הסדרה תשאיר ללא שינוי. כלומר,

$$f(b) = (\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_j,b_{j+1},b_{j+2}...,b_{2n})$$

כאשר:

$$.\ \bar{b}_i = \begin{cases} 1, & b_i = 0 \\ 0, & b_i = 1 \end{cases}$$

נראה שהסדרה המתקבלת כוללת n+1 אפסים ו- n–1 אחדים. ואכן, אם ברישא $(b_1,b_2,...,b_j)$ היו $(x-1)$ אפסים ו- x אחדים, הרי בסיפא $(b_{j+1},b_{j+2},...,b_{2n})$ יש $(n-x+1)$ אפסים ו- $(n-x)$ אחדים (כי בסה״כ בסדרה b היו n אפסים ו- n אחדים). לכן, בסדרה החדשה f(b) יהיו $(x+n-x+1) = n+1$ אפסים ו- $(x-1+n-x) = n-1$ אחדים, כלומר $f(b) \in C$.

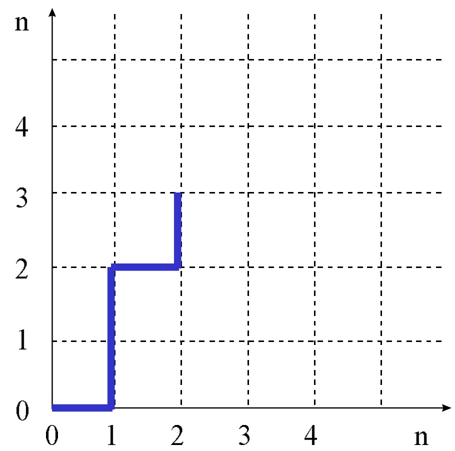
כדי להוכיח שהפונקציה f היא חח״ע ועל, נראה שקיימת ל- f פונקציה הופכית $f^{-1}:C\to B$.

תהי $c = (c_1,c_2,...,c_k,c_{k+1},...,c_{2n})\in C$ סדרה כלשהי, ויהי k המקום הראשון בסדרה שבו מספר האפסים עולה ממש על מספר האחדים. חייב להיות מקום כזה כי בסדרה c יש יותר אפסים מאחדים. הפונקציה f^{-1} תהפוך ברישא $(c_1,c_2,...,c_k)$ כל **1** ל- **0** וכל **0** ל- **1**, ואת יתר איברי הסדרה תשאיר ללא שינוי, בדומה ל- f.

ממש כמקודם, הסדרה המתקבלת כוללת n אפסים ו- n אחדים, שכן אם ברישא $(c_1,c_2,...,c_k)$ היו x אפסים ו- $(x-1)$ אחדים, אז בסיפא $(c_{k+1},c_{k+2},...,c_n)$ יש $(n-x+1)$ אפסים ו- $(n-x)$ אחדים. לכן בסדרה $f^{-1}(c)$ יהיו בסה״כ $(x-1+n-x+1) = n$ אפסים ו- $(x+n-x) = n$ אחדים כנדרש. יתר על כן, הסדרה $f^{-1}(c)$ איננה מאוזנת כי ברישא החדשה $(\bar{c}_1,\bar{c}_2,...,\bar{c}_k)$ יש יותר אחדים מאפסים. לכן, $f(c)\in B$.

קל לבדוק כעת שהפונקציות f, f^{-1} אכן פונקציות הופכיות זו לזו. □

הוכחה גיאומטרית: יש גם דרך גיאומטרית מעניינת להוכחת המשפט הזה. נייצג כל סדרה של אפסים ואחדים על ידי **מהלך סריגי**: נצא מנקודת הראשית (0,0) במישור ונתאים לכל **0** המופיע בסדרה צעד באורך יחידה ימינה. לכל **1** המופיע בסדרה נתאים צעד באורך יחידה למעלה. למשל, המהלך הסריגי בתרשים **4.3.2**, מתאים לסדרה (0,1,1,0,1).

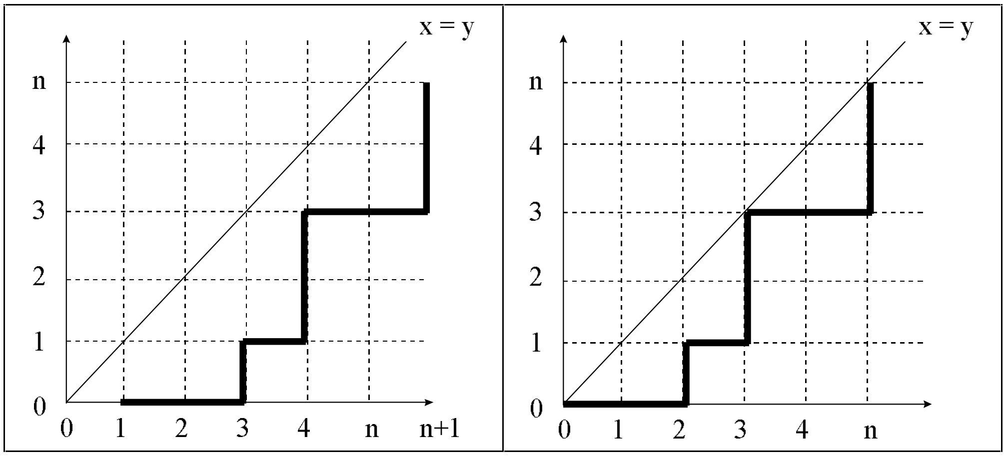


תרשים 4.3.2: מהלך סריגי המתאים לסדרה (0,1,1,0,1).

קל לראות שבעיית המניה של הסדרות המאוזנות של אפסים ואחדים מתורגמת בשפת המהלכים הסריגיים לבעיה הבאה:
מהו מספר המהלכים הסריגיים היוצאים מנקודת הראשית (0,0), מסתיימים בנקודה (n,n) ושוהים כל העת בגזרה $x \geq y \geq 0$? כלומר, מותר למהלך לגעת בישר $x = y$ אך לא לחצות אותו. (ראו תרשים 4.3.3 מימין.) במהלך כזה בכל שלב מספר הצעדים ימינה גדול או שווה למספר הצעדים למעלה, ועל כן בכל רישא של הסדרה המתאימה מספר האפסים גדול או שווה למספר האחדים. כמו-כן, העובדה שהמהלך מתחיל בנקודה (0,0) ומסתיים בנקודה (n,n), מבטיחה שמספר הצעדים ימינה הוא n ומספר הצעדים למעלה הוא n. כלומר, מספר האפסים הכולל יהיה n ומספר האחדים הכולל יהיה n.

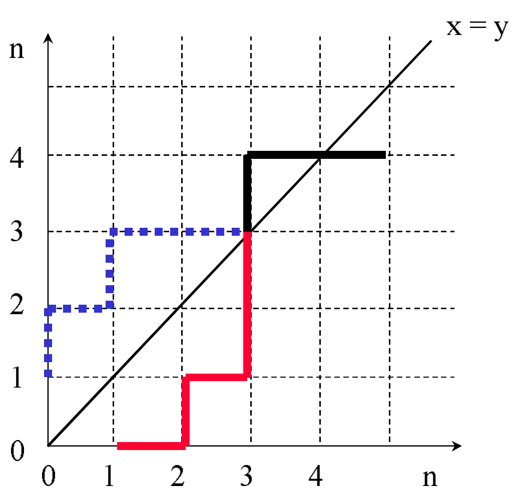
כדי לפשט את ההוכחה נזיז את המהלכים מקום אחד ימינה ונתבונן במהלכים היוצאים מהנקודה (1,0), מסתיימים בנקודה (n+1,n) ושוהים כל הזמן בגזרה $x > y \geq 0$. כלומר, עתה אסור למהלכים אפילו לגעת בישר $x = y$ (ראו תרשים 4.3.3 משמאל). ברור שגם מהלכים אלה מתאימים לסדרות מאוזנות של n אפסים ו- n אחדים.

כמו מקודם נגדיר את הקבוצות הבאות:
S היא קבוצת כל המהלכים הסריגיים מהנקודה (1,0) לנקודה (n+1,n) שאינם נוגעים בישר $x = y$.
A היא קבוצת כל המהלכים הסריגיים מהנקודה (1,0) לנקודה (n+1,n).
B היא קבוצת כל המהלכים הסריגיים מהנקודה (1,0) לנקודה (n+1,n) אשר פוגשים (או אף חוצים) את הישר $x = y$.
C היא קבוצת כל המהלכים הסריגיים מהנקודה (0,1) לנקודה (n+1,n), כלומר מהלכים המתחילים בנקודה (0,1), צועדים (n+1) צעדים ימינה ו- (n–1) צעדים למעלה ומסתיימים בנקודה (n+1,n).



תרשים 4.3.3: מימין מהלך סריגי מהנקודה (0,0) לנקודה (n,n) שנוגע בישר x = y.
משמאל מהלך סריגי שקול מהנקודה (1,0) לנקודה (n+1,n)
שאפילו אינו נוגע בישר x = y.

נראה כעת התאמה גיאומטרית בין מהלכים בקבוצה B למהלכים בקבוצה C. בהינתן מהלך $b\in B$, נמצא את המקום הראשון שבו הוא פוגש את הישר x = y, ונשקף את תחילתו של המהלך עד למקום זה יחסית לישר x = y. התאמה זו מחליפה מהלך מהנקודה (1,0) לנקודה (n+1,n) במהלך מהנקודה (0,1) לנקודה (n+1,n). כלומר קיבלנו מהלך בקבוצה C (ראו תרשים 4.3.4).



תרשים 4.3.4: שיקוף רישא של מהלך סריגי סביב הישר x = y. החלק ששיקפנו מקווקו.

ולהיפך, בהינתן מהלך $c\in C$ נמצא את המקום הראשון שבו הוא פוגש את הישר $x = y$. חייב להיות מקום כזה כי המהלך מתחיל מעל לישר $x = y$ בנקודה (0,1) ומסתיים מתחתיו בנקודה (n+1,n). שוב נשקף את תחילתו של המהלך עד למקום זה יחסית לישר $x = y$. נקבל מהלך שמתחיל בנקודה (1,0) ומסתיים בנקודה (n+1,n) ופוגש בוודאות את הישר $x = y$. על כן הוא שייך לקבוצה B.

הראינו פונקציה חח״ע ועל בין הקבוצה B לקבוצה C ולכן לשתי הקבוצות עוצמה שווה. ההוכחה נשלמת כמקודם בעזרת טענת העזר הבאה.

טענת עזר: מספר המהלכים הסריגיים מהנקודה (a,b) לנקודה (c,d) הוא $\binom{c-a+d-b}{c-a}$.

הוכחת טענת העזר: כדי להגיע מהנקודה (a,b) לנקודה (c,d) עלינו לבצע (c–a) צעדים ימינה ו- (d–b) צעדים למעלה. כל מהלך כזה נקבע על פי מיקום הצעדים ימינה מתוך בסה״כ (c–a+d–b) הצעדים שיש לצעוד. מספר הדרכים לבחור את מיקום הצעדים ימינה הוא $\binom{c-a+d-b}{c-a}$ כנדרש (טענה 4.2.15). □

כעת, על פי טענת העזר, מספר המהלכים בקבוצה A הוא $\binom{2n}{n}$ ואילו מספר המהלכים בקבוצה C הוא $\binom{2n}{n+1}$. מכאן:

$$|S| = |A|-|B| = |A|-|C| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

כמו בהוכחה הקודמת. □

תרגילים

1. הוכיחו את משפט הבינום של ניוטון באינדוקציה.
2. מה יהיה המקדם של a^2b^3 בביטוי $(a+b)^5$?
3. א. הוכיחו את הזהות הבאה באופן קומבינטורי ובאופן אלגברי: $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$.

   ב. נתונים 3n+1 איברים, מתוכם יש n איברים זהים ו- 2n+1 איברים שונים. מה מספר הדרכים לבחור n איברים מתוכם?
4. הוכיחו את הזהות הבאה: $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$ כאשר $m,n \ge k$.

   א. בדרך אלגברית.

הדרכה: השתמשו בשוויון $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ ובנוסחת הבינום.

ב. בדרך קומבינטורית.

ג. הסיקו את הזהות $\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

5. הוכיחו את הזהות הבאה: $\binom{n+k+1}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}$.

א. בדרך קומבינטורית.

ב. באינדוקציה על n+k.

ג. באינדוקציה על k.

6. הוכיחו את האי-שוויון הבא: $\binom{n}{j}\binom{n-j}{k}\le\binom{n}{j+k}$.

א. בדרך אלגברית.

ב. בדרך קומבינטורית.

ג. מתי יהיה זה שוויון ממש?

7. הוכיחו ש- $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ מספר שלם חיובי לכל $n \ge 0$.

א. בדרך אלגברית.

ב. בדרך קומבינטורית.

הדרכה: הראו שמספר הדרכים לחלק קבוצה בת 2n איברים ל- n זוגות הוא $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$. ראו גם תרגיל 3, בסעיף 4.4.

8. א. במערכת בחירות זכו שני המועמדים ב- n קולות כל אחד. בכמה אופנים ניתן למנות את 2n הקולות כך שמועמד אחד יוביל במשך כל תהליך המנייה?

ב. כעת זכה מועמד אחד ב- a קולות והמועמד השני ב- b קולות כאשר $a > b$. בכמה אופנים ניתן למנות את הקולות כך שהמועמד הראשון יוביל במשך כל תהליך המנייה?

9. הוכיחו את הזהות הבאה: $n\binom{2n-1}{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2$.

4.4. פתרון בעיות מניה על ידי נוסחאות נסיגה

הנושאים שיוצגו: *מספרי פיבונאצ'י, מספרי סטירלינג מסוג שני, בעיית מגדלי האנוי, תמורות ללא נקודות שבת, מספרי קטלן.*

פעמים רבות קשה לפתור בעיות מניה בדרך ישירה, וקל יחסית לפתח נוסחת נסיגה המתארת את הפתרון (נוסחאות נסיגה או נוסחאות רקורסיביות מתוארות בסעיף 3.4). בשלב הבא אפשר

לפתור את נוסחת הנסיגה. השיטות לפתרון נוסחאות נסיגה רבות ומגוונות ומהוות פרק נכבד בפני עצמן. מכיוון שהכלים הכרוכים בפתרון נוסחאות נסיגה יפותחו רק בהמשך בפרק 6, לא נדון כאן בפתרון נוסחאות נסיגה אלא רק בפיתוחן.

בסעיף זה נראה כמה דוגמאות לפתרון בעיות מניה בדרך רקורסיבית. כזכור, בדרך זו אנו מתארים את ערכה של פונקציה כלשהי במספר מסוים בעזרת ערכי הפונקציה במספרים קטנים יותר. נפתח בדוגמה פשוטה.

דוגמה 4.4.1: יהי $g(n)$ מספר הסדרות באורך n שניתן ליצור מאיברי הקבוצה $\{0,1,2\}$ כך שאינן מכילות שני איברים רצופים שווים. נראה שהפונקציה g נתונה על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$g(1) = 3$$

$g(n) = 2g(n-1)$ לכל $n > 1$.

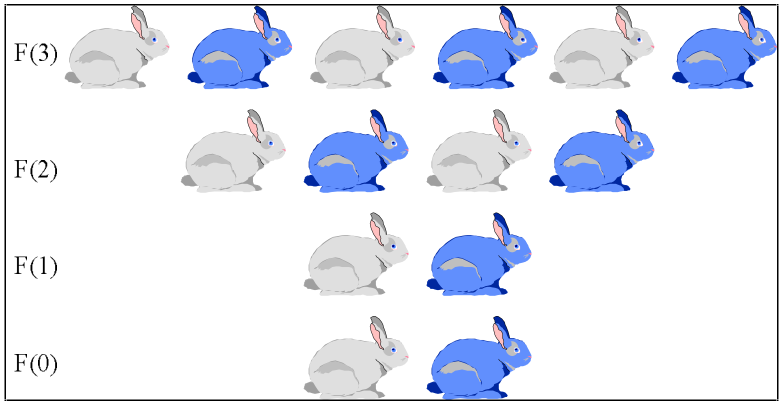
ברור ש- $g(1) = 3$ כי אוסף הסדרות המותרות באורך 1 כולל בדיוק את שלוש הסדרות 3 ,2 ,1. כעת נניח ש- $n > 1$. מספר הסדרות החוקיות באורך $(n-1)$ הוא $g(n-1)$. תהי $(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ סדרה חוקית כלשהי באורך $n-1$. אפשר להשלים את הסדרה בדיוק בשתי דרכים לסדרה חוקית באורך n, כיוון שהאיבר a_n צריך רק לקיים $a_n \neq a_{n-1}$ ולכן יש בדיוק שתי אפשרויות לבחירתו. מכיוון שאפשר לקבל כך כל אחת מהסדרות באורך n, נקבל על פי עקרון המכפלה ש- $g(n) = 2g(n-1)$.

בדוגמה זו קל לבצע גם את השלב הבא ולהוכיח באינדוקציה שפתרון נוסחת הנסיגה הוא $g(n) = 3\cdot 2^{n-1}$ (הוכיחו!).

נעבור כעת לפתרונן של מספר בעיות מניה ידועות ומפורסמות שנפתרו בדרך רקורסיבית. פתרונן של נוסחאות הנסיגה שנתאר כעת אינו תמיד פשוט, אך תהליך פיתוח הנוסחאות עצמן אינו מסובך. המצב האופייני בפיתוח נוסחת נסיגה לפונקציה כלשהי f, הוא שמחלקים את $f(n)$ העצמים שעלינו למנות למספר תת-קבוצות זרות. כדי למנות את מספר האיברים בכל תת-קבוצה כזאת, מוצאים התאמה חח״ע ועל בין התת-קבוצה המבוקשת לבין קבוצות מגודל $f(k)$, כאשר k ערך קטן מ- n. לבסוף, מכיוון שחילקנו את הבעיה המקורית לתת-קבוצות זרות, מותר לנו להשתמש בעקרון הסכום ולסכם את גודלן של התת-קבוצות השונות.

מספרי פיבונאצ׳י

המתמטיקאי ליאונרדו פיבונאצ׳י שחי במאה ה- 12, ניסה לפתור את הבעיה הבאה: מקבלים זוג ארנבים, זכר ונקבה, שזה עתה נולדו. לאחר חודש הארנבים מגיעים לבגרות מינית ולאחר חודש נוסף מולידים זוג צאצאים, זכר ונקבה אף הם. באופן כללי כל הארנבים עוברים תהליך דומה: חודש לאחר לידתם הם מגיעים לפרקם, וחודש אחר-כך הם מולידים זוג צאצאים (זכר ונקבה) וכך הלאה. כל זוג ארנבים פורה, ממשיך להוליד מדי חודש זוג ארנבים חדש. לצורך העניין נניח שמדובר בארנבים בני אלמוות, ונשאלת השאלה כמה זוגות ארנבים יהיו לאחר שנה אחת, או באופן כללי כמה זוגות ארנבים יהיו לאחר n חודשים? פתרון ישיר של בעיה זאת הוא מסובך. לעומת זאת נראה שקל יחסית לפתור את הבעיה בצורה רקורסיבית.



תרשים 4.4.1: ארבעה דורות של זוגות ארנבים.
הזכרים בצבע כהה והנקבות בצבע בהיר.

משפט 4.4.2: יהי $F(n)$ מספר זוגות הארנבים אחרי n חודשים. הפונקציה F מקיימת את נוסחת הנסיגה:

$$F(0) = 1, \quad F(1) = 1$$

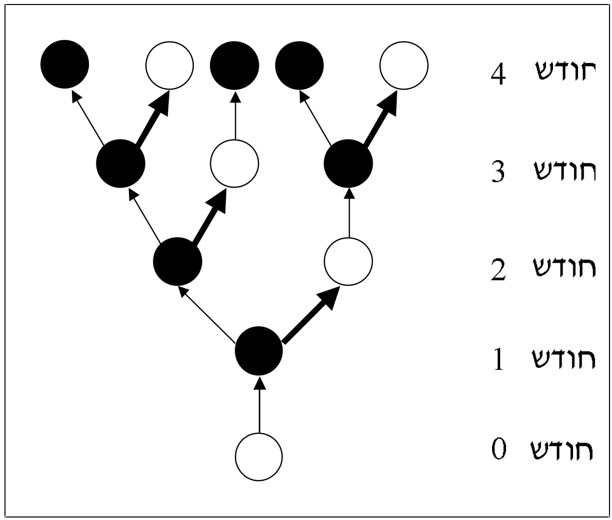
$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ לכל $n > 1$.

הוכחה: ברור ש- $F(0) = 1$ כי בזמן 0 ישנו רק הזוג המקורי שזה עתה קיבלנו. כמו-כן $F(1) = 1$ כי גם לאחר חודש אחד יש לנו עדיין רק זוג אחד (אף כי הוא כבר זוג פורה). כיצד נחשב את $F(n)$?
נחלק את זוגות הארנבים שחיים בזמן n לשתי קבוצות:

א) הזוגות הפוריים: אלו הם $F(n-1)$ הזוגות שחיו כבר בזמן $(n-1)$, והם בוודאות פוריים חודש אח״כ. נדגיש זאת: לכל k, מספר הזוגות הפוריים החיים בזמן k הוא $F(k-1)$ (מכלל $F(k)$ הזוגות החיים אז).

ב) הזוגות שעדיין אינם פוריים: אלה זוגות שזה עתה נולדו. מספרם הוא לכן כמספר הזוגות שהיו פוריים בזמן $n-1$ (כי כל זוג פורה כזה הוליד זוג צאצאים). אולם לפי ההערה הקודמת, מספר הזוגות הפוריים בזמן k הוא $F(k-1)$. כאן $k = n-1$, ולכן מספר הזוגות הלא פוריים בזמן n, השווה כאמור למספר הזוגות הפוריים בזמן $n-1$, הוא $F(k-1) = F(n-2)$.

בסה״כ קיבלנו $F(n) = F(n-1)+F(n-2)$ לכל $n > 1$. תרשים 4.4.2 ממחיש את החלוקה של זוגות הארנבים לשתי הקבוצות של זוגות פוריים וזוגות לא פוריים, ומראה מיהם הזוגות הוותיקים – הפוריים, ומי הזוגות החדשים – הלא פוריים. □



תרשים 4.4.2: עיגול לבן מייצג זוג ארנבים שזה עתה נולד. עיגול שחור מייצג זוג פורה. חץ עבה מציין הולדה, חץ דק מציין שמדובר באותו הזוג בחודש הבא.

כעת ניתן להשתמש בנוסחה ובערכים ההתחלתיים כדי לחשב למשל את $F(12)$ על ידי **הצבה חוזרת** בנוסחת הנסיגה. למשל, $F(2) = F(1)+F(0) = 1+1 = 2$, ואילו $F(3) = F(2)+F(1) = 2+1 = 3$. על ידי שימוש חוזר בנוסחה נקבל ש- $F(12) = 233$. סדרת המספרים ...1,1,2,3,5,8,13,21,34 המתקבלת על ידי שימוש חוזר בנוסחה נקראת **סדרת פיבונאצ'י**. כפי שראינו בסעיף **3.4**, תרגיל **1**, אפשר להוכיח באינדוקציה שפתרון הנוסחה הוא:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \text{ לכל } n \geq 0.$$

בהמשך נראה כיצד מגיעים לביטוי זה בדרך שיטתית. מספרי פיבונאצ'י מופיעים בהקשרים רבים, כפי שאפשר לראות למשל במשפט הבא.

משפט 4.4.3: יהי $f(n)$ מספר התת-קבוצות של $\{1,2,...,n\}$ שאינן מכילות זוג מספרים עוקבים. הפונקציה f מקיימת את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$f(0) = 1 \quad f(1) = 2$$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ לכל } n > 1.$$

הוכחה: ברור ש-$f(0) = 1$ ו- $f(1) = 2$ (בדקו). נניח כעת ש- $n > 1$. נחלק את התת-קבוצות החוקיות של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ (כאלה שאינן מכילות זוג מספרים עוקבים) לשני סוגים:

א) תת-קבוצות שאינן מכילות את האיבר n: מספרן $f(n-1)$, שכן אלה למעשה תת-קבוצות חוקיות של $\{1,2,...,n-1\}$.

ב) תת-קבוצות שמכילות את האיבר n: מספרן $f(n-2)$. אכן, קבוצות אלה בנויות מתת-קבוצות חוקיות של $\{1,2,...,n-2\}$ בתוספת האיבר n. מצד אחד, כשמוסיפים את האיבר n לתת-קבוצה חוקית של $\{1,2,...,n-2\}$, מקבלים תת-קבוצה חוקית של $\{1,2,...,n\}$. מצד שני, תת-קבוצה חוקית שמכילה את n מנועה מלהכיל את $n-1$. דהיינו, לאחר השמטת n ממנה נקבל תת-קבוצה חוקית של $\{1,2,...,n-2\}$. הראינו, אם כן, התאמה חח״ע בין תת-קבוצות חוקיות של $\{1,2,...n-2\}$ לבין תת-קבוצות חוקיות של $\{1,2,...,n\}$ שמכילות את n, ולכן מספרן שווה.

בסה״כ קיבלנו $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ קבוצות חוקיות כנדרש. □

מספרי סטירלינג

מושג החלוקה של קבוצה הוגדר בסעיף 1.3. נספור כעת כמה חלוקות אפשריות יש לקבוצה כלשהי.

משפט 4.4.4: יהי $S(n,k)$ מספר החלוקות של $\{1,2,...,n\}$ ל- k חלקים (זרים, לא ריקים) כאשר $1 \le k \le n$. הפונקציה $S(n,k)$ מוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$S(n,1) = 1 \quad S(n,n) = 1$$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$ לכל $2 \le k \le n-1$.

המספרים $S(n,k)$ נקראים **מספרי סטירלינג** (מסוג שני).

הוכחה: ברור שיש רק חלוקה אחת של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ לחלק אחד (הקבוצה עצמה), ולכן $S(n,1) = 1$. כמו-כן, יש רק חלוקה אחת של $\{1,2,...,n\}$ ל- n חלקים $\{\{1\},\{2\},...,\{n\}\}$, ולכן $S(n,n) = 1$.

כעת נניח ש- $2 \le k \le n-1$ ונבחן כיצד האיבר n משתלב בחלוקות השונות. ייתכנו המקרים הבאים:

א) האיבר n מהווה חלק לכשעצמו $\{n\}$: בהינתן חלוקה של $\{1,2,...,n\}$ ל- k חלקים שבה חלק אחד הוא $\{n\}$, נשמיט את $\{n\}$ ונקבל חלוקה של $\{1,2,...,n-1\}$ ל- $(k-1)$ חלקים. ולהיפך, בהינתן חלוקה של $\{1,2,...,n-1\}$ ל- $(k-1)$ חלקים, נוסיף את $\{n\}$ ונקבל חלוקה של $\{1,2,...,n\}$ ל- k חלקים שבה חלק אחד הוא $\{n\}$. כלומר יש התאמה חח״ע ועל בין חלוקות של $\{1,2,...,n\}$ ל- k חלקים שבהן חלק אחד הוא $\{n\}$, לבין חלוקות של $\{1,2,...,n-1\}$ ל- $(k-1)$ חלקים. מכאן שמספר החלוקות בשני המקרים שווה והוא $S(n-1,k-1)$.

ב) האיבר n נמצא בחלק שכולל איברים נוספים: נתבונן בחלוקה של $\{1,2,...,n-1\}$ ל- k חלקים. את האיבר ה- n אפשר לצרף לכל אחד מ- k החלקים. כך נקבל בדיוק את כל החלוקות של $\{1,2,...,n\}$ ל- k חלקים, כאשר n איננו חלק כשלעצמו. מספר החלוקות של $\{1,2,...,n-1\}$ ל- k חלקים הוא $S(n-1,k)$, ומכיוון שאפשר להוסיף את n לכל אחד מ- k החלקים, נקבל לפי עקרון המכפלה שמספר החלוקות הכולל מסוג זה הוא $kS(n-1,k)$.

מצירוף שני סוגי החלוקות מקבלים על פי עקרון הסכום את הנוסחה המבוקשת. □

כך למשל, נחשב את $S(4,2)$ בעזרת נוסחת הנסיגה שהוכחנו זה עתה:

$$\begin{aligned} S(4,2) &= S(3,1) + 2\cdot S(3,2) = \\ &= S(3,1) + 2\cdot\big(S(2,1) + 2\cdot S(2,2)\big) \\ &= 1 + 2\cdot\big(1 + 2\cdot 1\big) = 7 \end{aligned}$$

בתרשים 4.4.3 אפשר לראות את 7 החלוקות של $\{1,2,3,4\}$ ל- 2 חלקים.

$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$	$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$	$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$	$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$	$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$	$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$	

תרשים 4.4.3: החלוקות של $\{1,2,3,4\}$ ל- 2 חלקים, $S(4,2) = 7$.

בניגוד לדוגמאות הקודמות שראינו, במקרה זה לא ידועה נוסחה מפורשת ל- $S(n,k)$, אף כי יש מידע רב על ערכי הפונקציה במקרים שונים (ראו למשל תרגיל 10).

בעיית מגדלי האנוי

אחת הבעיות הידועות במדעי המחשב היא בעיית מגדלי האנוי. המשחק הומצא ב- 1883 על ידי המתמטיקאי הצרפתי אדוארד לוקה Edouard Lucas. האגדה מספרת שלפי המסורת הבודהיסטית, כאשר אלוהים ברא את העולם הוא יצר שלושה עמודים גבוהים שעמדו בקו ישר. על העמוד השמאלי הייתה ערימה של 64 טבעות הולכות וקטנות זו על גבי זו. שני העמודים הנותרים היו ריקים. על הכמרים הבודהיסטים הוטלה המשימה להעביר את הטבעות לעמוד הימני, אולם הותר להם להעביר כל פעם רק טבעת אחת, ונאסר עליהם להניח אי פעם טבעת גדולה על טבעת קטנה. כדי לאפשר את המלאכה הותר להם להשתמש גם בעמוד האמצעי, על מנת לאחסן עליו טבעות במהלך התהליך. בסיום, אם יצליחו, יגיע קצו של העולם וכולם יזכו לנירוונה. אך אל דאגה, גם אם הנזירים יודעים את הפתרון לבעיה, והם יזיזו טבעת אחת בשניה, עדיין יידרשו 584,942,417,355 שנים עד להשגת המשימה (פי 50 בערך מגיל היקום). השאלה היא אם כן, כיצד על הנזירים לבצע את משימתם, וכמה פעולות של העברת טבעות יידרשו מהם?

משפט 4.4.5: יהי $h(n)$ מספר הפעולות הנדרשות לפתרון בעיית מגדלי האנוי כאשר יש n טבעות (בבעיה המקורית $n = 64$). הפונקציה $h(n)$ מתוארת על ידי נוסחת הנסיגה:

$$h(1) = 1$$

$$h(n) = 2h(n-1) + 1 \quad \text{לכל } n > 1.$$

הוכחה: ברור ש- $h(1) = 1$, לכן נניח ש- $n > 1$, ונתאר כיצד להעביר את n הטבעות מהעמוד השמאלי לימני. הפתרון שנציג יהיה רקורסיבי (ראו תרשים 4.4.4):

1) נעביר $(n-1)$ טבעות מהעמוד השמאלי לעמוד האמצעי, ב- $h(n-1)$ פעולות.

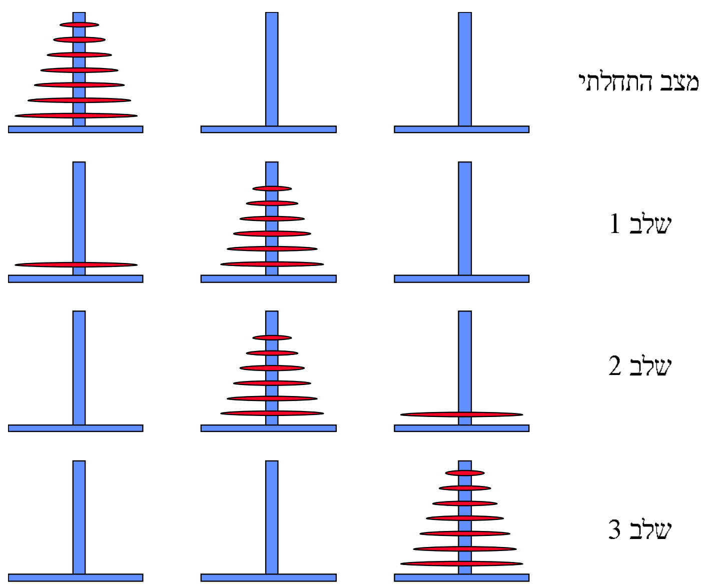
2) נעביר את הטבעת התחתונה (שכעת התפנתה) מהעמוד השמאלי לעמוד הימני, בפעולה אחת.

3) נעביר את $(n-1)$ הטבעות מהעמוד האמצעי לעמוד הימני, ב- $h(n-1)$ פעולות.

שימו לב שבשלב 3 הימצאותה של הטבעת התחתונה על העמוד הימני איננה מפריעה, כי היא הגדולה ביותר, ולכן ניתן לשים עליה כל טבעת שהיא. כמו-כן, מיקום העמודים אינו משנה, ולכן

הפתרון שהצגנו הוא אכן רקורסיבי. לכן כדי להעביר את n הטבעות לפי הפתרון שהצגנו נדרשות $h(n-1) + 1 + h(n-1) = 2h(n-1)+1$ פעולות.

נשים לב שהפתרון הרקורסיבי שהצגנו זה עתה מוכיח רק כי $h(n) \le 2h(n-1) + 1$, שכן הראינו כאן דרך להעביר את n הטבעות ב- $2h(n-1) + 1$ צעדים. עדיין עלינו לברר האם אפשר לפתור את הבעיה בפחות צעדים. ואכן, לא קשה להראות שהדרך שהצגנו זה עתה היא הדרך היחידה לבצע את המשימה, ולכן $h(n) = 2h(n-1) + 1$. נתבונן ברגע שבו הטבעת הגדולה ביותר מועברת מהעמוד השמאלי אל העמוד הימני. היא חייבת להיות חשופה בשלב זה, ועל מנת שנוכל להעבירה לעמוד השמאלי, העמוד הזה חייב להיות ריק. לכן בשלב זה יתר $n-1$ הטבעות חייבות להיות ערומות כחוק על העמוד האמצעי. כלומר, אנו חייבים להגיע למצב שמתואר בתרשים 4.4.4 בשלב 1. מספר הצעדים המזערי להשגת מצב זה הוא $h(n-1)$. באינדוקציה מספר הצעדים המובילים משלב 2 לשלב 3 אף הוא לפחות $h(n-1)$. □



תרשים 4.4.4: פתרון רקורסיבי של בעיית מגדלי האנוי.

אתגר: מה פתרון נוסחת הנסיגה $h(n)$? נסו לנחש פתרון והוכיחו שהפתרון שמצאתם נכון על ידי הוכחה באינדוקציה מתמטית.

תמורות ללא נקודות שבת

עשרה אנשים נכנסים למסעדה ותולים את כובעיהם על קולב. בסיום הארוחה כל אחד לוקח כובע כלשהו. בכמה דרכים שונות הם יכולים לקחת את כובעיהם כך שאיש מביניהם לא יקבל את הכובע שלו בחזרה?

ניתן לייצג בעיה זו כבעיה הקומבינטורית הבאה.

הגדרה 4.4.6: תהי $\pi = (\pi_1,\pi_2,...,\pi_n)$ תמורה של איברי הקבוצה $\{1,2,...,n\}$. אינדקס $1 \le i \le n$ שעבורו $\pi_i = i$ נקרא **נקודת שבת** של התמורה π. התמורה π תיקרא תמורה **ללא נקודות שבת**, אם לא קיים $1 \le i \le n$ שעבורו $\pi_i = i$.

דוגמה 4.4.7: נתבונן בתמורות של הקבוצה $\{1,2,3,4\}$. בתמורה $(2,1,3,4)$ המספרים 3,4 הם נקודות שבת. לעומת זאת התמורה $(2,1,4,3)$ היא תמורה ללא נקודות שבת.

בבעיית הכובעים אנו נשאלים מהו מספר התמורות ללא נקודות שבת של הקבוצה $\{1,2,...,10\}$, כאשר מתבוננים על אדם שקיבל את כובעו בחזרה כעל נקודת שבת. ביתר דיוק התמורה π מתאימה לאדם ה- i את הכובע π_i, והאדם ה- i קיבל בחזרה את כובעו אם ורק אם i היא נקודת שבת של התמורה π. באופן כללי נרצה לדעת מהו מספר התמורות ללא נקודת שבת של $\{1,2,...,n\}$ (בבעיית הכובעים $n = 10$).

משפט 4.4.8: יהי $D(n)$ מספר התמורות ללא נקודות שבת של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$. הפונקציה $D(n)$ נתונה על ידי נוסחת הנסיגה:

$$D(1) = 0, \quad D(2) = 1$$

$$D(n) = (n-1)[D(n-1)+D(n-2)]$$ לכל $n > 2$.

הוכחה: נבדוק תחילה את נכונות הנוסחה ל- $n = 1,2$. ואכן, אם $n = 1$ אז ברור שאין תמורות ללא נקודות שבת, ואמנם $D(1) = 0$. כש- $n = 2$, יש שתי תמורות. האחת היא $(2,1)$ שאין לה נקודות שבת, והשנייה היא $(1,2)$ ובה יש נקודות שבת. ולכן $D(2) = 1$ כפי שנטען.

נוכיח כעת את הטענה ל- $n > 2$. נתבונן על תמורה כלשהי π ללא נקודות שבת ונניח כי $\pi_1 = i$, כלומר האיבר הראשון בתמורה π הוא i. מובן כי $2 \le i \le n$ (כי אילו היה $\pi_1 = 1$ אז 1 הייתה נקודת שבת של π). נקבע לעת עתה את הערך i, ונחלק את התמורות π ללא נקודות שבת שבהן $\pi_1 = i$ לשני סוגים:

א) $\pi_i = 1$, כלומר במקום ה- i בתמורה π מופיע 1: במקרה זה כדי להשלים את התמורה π, עלינו למצוא תמורה ללא נקודות שבת של הקבוצה $A = \{2,3,...,i-1,i+1,...,n\}$. בקבוצה A יש $n-2$ איברים, ומכיוון שאין חשיבות לשמות האיברים מספר התמורות האפשריות כאן הוא $D(n-2)$.

ב) $\pi_i \ne 1$, כלומר במקום ה- i נמצא מספר שונה מ- 1: נראה שבמקרה זה מספר התמורות הוא $D(n-1)$. לשם כך, ננסח את הגדרת הפונקציה $D(k)$ במילים שונות במקצת. נתונים לנו k עצמים שונים ו- k תאים שונים. יש למקם כל עצם בתא לבדו בכפוף לתנאי הבא: לכל איבר יש תא ייחודי לו שבו אסור לאיבר הזה לשכון. מספר הדרכים למקם את העצמים בתאים הוא $D(k)$ (בהגדרה המקורית של בעיית התמורות ללא נקודות שבת, קבוצת העצמים היא $\{1,2,...,k\}$ והתאים ממוספרים ב- $\{1,2,...,k\}$. התנאי הוא שלעצם i אסור לשכון בתא i). ואכן במקרה הנוכחי עלינו למקם את $n-1$ העצמים $\{1,2,...,i-1,i+1,...,n\}$ בתאים $\{2,3,...,n\}$ (זכרו ש- i כבר

מוקם בתא 1 כי $\pi_1 = i$). מובן שלאיבר j אסור לשכון בתא j, וזאת לכל j השונה מ- 1,i. ואילו, לאיבר 1 אסור לשכון בתא i (הרי $\pi_i \neq 1$, כי אחרת היינו במקרה א'), וזה איסור הייחודי לו. לכן, אנו מונים בדיוק את $D(n-1)$.

בסה"כ קיבלנו $D(n-1)+D(n-2)$ דרכים להשלים את התמורה כאשר $\pi_1 = i$, ומכיוון ש- $2 \le i \le n$, כלומר i יכול לקבל $(n-1)$ ערכים שונים, נקבל על פי עקרון המכפלה את התוצאה הדרושה. □

בהמשך הפרק, בסעיף 4.6 העוסק בעקרון ההכלה וההדחה, נלמד איך למצוא פתרון ישיר לבעיה זו (ראו משפט 4.6.12). הקוראים עשויים לשאול את עצמם מה הטעם בניתוח נוסחאות נסיגה אם ידועה שיטת פתרון ישירה. אנו נראה בהמשך, שפתרון לבעיית מניה קומבינטורית, הן בדרך ישירה והן באמצעות פיתוח נוסחת נסיגה, מחזקים את הבנתנו בבעיה.

מספרי קטלן

כזכור ראינו בסעיף 4.3, משפט **4.3.11**, שמספר המחרוזות המאוזנות שבנויות מ- n סוגריים שמאליים ו- n סוגריים ימניים הוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. נמצא כעת נוסחת נסיגה המתארת את מספר המחרוזות האלה. לשם נוחיות הדיון נסמן סוגריים שמאליים) על ידי 0 וסוגריים ימניים (על ידי 1, כפי שכבר עשינו בסעיף 4.3.

משפט 4.4.9: יהי $C(n)$ מספר המחרוזות המאוזנות שכוללות n אחדים ו- n אפסים. הפונקציה $C(n)$ מקיימת את נוסחת הנסיגה:

$$C(0) = C(1) = 1$$

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n} C(k-1)C(n-k) \quad \text{לכל } n > 1.$$

הוכחה: נבדוק תחילה את ערכי ההתחלה. ואכן המחרוזת הריקה היא מאוזנת, ולכן $C(0) = 1$. כמו-כן, ברור ש- $C(1) = 1$ כי יש רק מחרוזת מאוזנת אחת כש- $n = 1$ והיא המחרוזת 01.
נניח כעת ש- $n > 1$. נסמן ב- $P(k)$ את מספר המחרוזות המאוזנות **המינימליות** של k אפסים ו- k אחדים, כלומר מחרוזות מאוזנות שאין להן אף רישא ממש שהיא מחרוזת מאוזנת. כך למשל, המחרוזת 001011 היא מינימלית, אולם המחרוזת 010011 אינה מינימלית כי הרישא 01 שלה גם היא מאוזנת. במילים אחרות, במחרוזת מינימלית מספר האפסים בכל רישא גדול ממש ממספר האחדים ברישא (פרט לרישא הריקה ולרישא שהיא המחרוזת כולה). קל לראות כי:

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n} P(k)C(n-k)\,.$$

הסיבה היא זו: בהינתן מחרוזת מאוזנת של n אפסים ו- n אחדים, נביט ברישא הקצרה ביותר שלה שהיא מחרוזת מאוזנת בפני עצמה. אם מניחים שברישא הזו יש k אפסים ו- k אחדים, אז מספר הרישות המינימליות האפשריות הוא כאמור $P(k)$. בהינתן רישא כזו ניתן להשלים אותה למחרוזת מאוזנת של n אפסים ו- n אחדים על ידי שרשור מחרוזת מאוזנת כלשהי בעלת $n-k$ אפסים ו- $n-k$ אחדים (היות שהמחרוזת התאזנה במקום זה, וכללה בדיוק k אפסים ו- k אחדים, אנחנו "מתחילים מחדש" ויכולים לשרשר כאן כל מחרוזת מאוזנת של $n-k$ אפסים

ו- $n-k$ אחדים). לפי עקרון המכפלה בהינתן k מסוים, מספר המחרוזות המאוזנות של n אפסים ו- n אחדים שניתן לבנות בדרך שתוארה כעת הוא $P(k)C(n-k)$. אולם $1 \le k \le n$, ולכן לפי עקרון הסכום נקבל את השוויון $C(n) = \sum_{k=1}^{n} P(k)C(n-k)$ (השימוש בעקרון הסכום מוצדק כאן מפני שלכל מחרוזת מאוזנת יש רישא מאוזנת מינימלית אחת ויחידה).

נותר להוכיח כי $P(k) = C(k-1)$, וזאת נעשה על ידי שימוש בפונקציה חח"ע ועל. כל מחרוזת מינימלית x הכוללת k אפסים ו- k אחדים, מתחילה בהכרח ב- 0 ומסתיימת ב- 1. נשמיט ממנה את האפס הראשון ואת האחד האחרון. במחרוזת המתקבלת y יש $k-1$ אפסים ו- $k-1$ אחדים והיא מאוזנת. אחרת, אילו הייתה ב- y רישא שבה מספר האפסים קטן ממש ממספר האחדים, אז במקום המתאים ב- x יש בדיוק אפס אחד יותר. לכן באותו מקום ב- x מספר האפסים היה קטן או שווה למספר האחדים. אולם x מאוזנת ולכן ברישא הזו חייב להתקיים שוויון בין מספר האפסים למספר האחדים. כלומר ב- x יש רישא מאוזנת וזו סתירה לכך ש- x מינימלית.
הפונקציה ההופכית לזו שתיארנו פשוטה אף היא. בהינתן מחרוזת מאוזנת y עם $k-1$ אפסים ו- $k-1$ אחדים, ניצור ממנה מחרוזת x על ידי הוספת אפס בתחילתה של y ואחד בסופה. המחרוזת x מאוזנת מינימלית. אילו הייתה ל- x רישא מאוזנת, אז במקום המתאים ב- y היה מספר האפסים קטן ממש ממספר האחדים, וזו סתירה להיותה של y מאוזנת.

הראינו פונקציה חח"ע ועל בין קבוצת המחרוזות המאוזנות המינימליות הבנויות מ- k אפסים ו- k אחדים, לבין קבוצת המחרוזות המאוזנות הבנויות מ- $k-1$ אפסים ו- $k-1$ אחדים. לכן עוצמת הקבוצות שווה, כלומר $P(k) = C(k-1)$. נציב זאת בשוויון $C(n) = \sum_{k=1}^{n} P(k)C(n-k)$ ונקבל את נוסחת הנסיגה הדרושה. □

תרגילים

1. מצאו נוסחת נסיגה שתתאר את מספר הקבוצות החלקיות של $\{1,2,...,n\}$.

2. מצאו נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך n מתוך האותיות כ, ך, מ, ם, פ, ף, צ, ץ, כך שאין שתי אותיות סופיות סמוכות.

3. כפי שראינו בתרגיל 7, בסעיף 4.3, מספר הדרכים לחלק קבוצה בת $2n$ איברים ל- n זוגות הוא $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$. בתרגיל זה נכליל את התוצאה הזאת.
   א. יהי $g_3(n)$ מספר הדרכים לחלק קבוצה בת $3n$ איברים ל- n שלשות. הוכיחו ש- $g_3(1) = 1$, ולכל $n > 1$, $g_3(n) = \binom{3n-1}{2} \cdot g_3(n-1)$.
   ב. מצאו נוסחת נסיגה ל-$g_k(n)$: מספר הדרכים לחלק קבוצה בת kn איברים ל- n קבוצות, כל אחת בת k איברים.
   אתגר: תנו נוסחה מפורשת ל- $g_k(n)$.

4. חיידק מתחלק שעה לאחר היווצרו לשני חיידקים. כל חיידק חדש מתנהג באופן דומה (שימו לב שחיידק מתחלק רק שעה לאחר שהוא נוצר). יהי $a(n)$ מספר החיידקים לאחר n שעות כאשר בהתחלה יש חיידק בודד.
   א. מצאו נוסחת נסיגה עבור $a(n)$.
   ב. נסו לנחש נוסחה מפורשת ל- $a(n)$ והוכיחו באינדוקציה שהיא נכונה.

5. קוף עולה על סולם בעל n שלבים. בכל שלב הוא עולה צעד אחד או שני צעדים. בכמה דרכים שונות יכול הקוף להגיע לשלב ה- n והאחרון של הסולם?

6. לשחקן גולף יש בתיק k כדורי גולף זהים ו- n צבעים שונים.
   א. בכמה דרכים ניתן לצבוע את הכדורים כאשר כל כדור נצבע בצבע אחד בלבד (סדר הכדורים בתיק אינו חשוב)?
   ב. יהי $f(n,k)$ מספר הדרכים לצבוע את k הכדורים ב- n הצבעים. מצאו נוסחת נסיגה ל- $f(n,k)$.
   ג. הוכיחו את הזהות הקומבינטורית הבאה:
   $$\binom{n+k}{n}=\sum_{i=0}^{k}\binom{i+n-1}{n-1}.$$
   כבר ראינו את הזהות הזאת בתרגיל 5, בסעיף 4.3, אולם כאן מדובר בהוכחה קומבינטורית אחרת המסתמכת על בעייתו של שחקן הגולף.

7. דגל מחולק ל- n רצועות. כל רצועה יכולה להיות צבועה באחד מהצבעים: אדום, כחול, ירוק וצהוב. מצאו את מספר הדגלים השונים האפשריים עבור כל אחד מהמקרים הבאים:
   א. כאשר אין שום הגבלה על צבעי הרצועות.
   ב. כאשר אסור ששתי רצועות סמוכות יהיו צבועות באותו צבע.
   ג. מצאו נוסחת נסיגה למספר הדגלים כאשר אסור ששתי הרצועות הקיצוניות יהיו צבועות באותו צבע ואסור ששתי רצועות סמוכות יהיו צבועות באותו צבע.

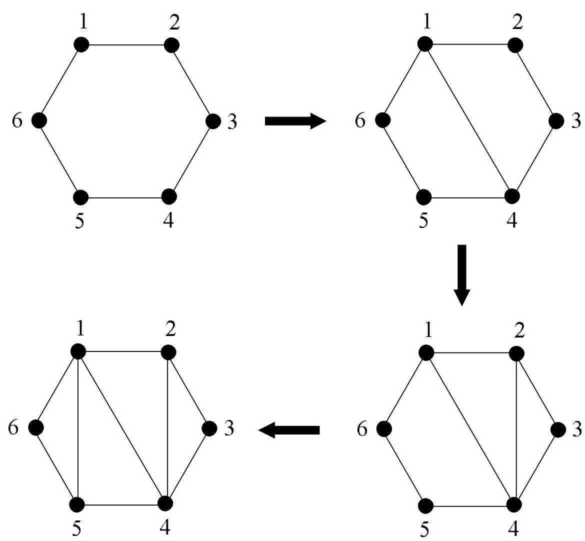
8. בחנות גלידה יש 16 טעמים שונים של גלידה. אין מחסור באף טעם.
   א. בכמה דרכים אפשר לקנות 8 כדורים של גלידה, לאו דווקא בטעמים שונים (סדר הכדורים אינו חשוב).
   ב. בכמה דרכים אפשר לקנות 8 כדורים של גלידה בטעמים שונים (סדר הכדורים אינו חשוב).
   ג. בכמה דרכים אפשר לחלק את 8 הכדורים שנקנו בסעיף ב' ל- 4 ילדים, כך שכל ילד יקבל בדיוק 2 כדורים של גלידה?
   ד. מצאו נוסחת נסיגה למספר הדרכים לסדר בגביע n כדורים של גלידה משני טעמים – וניל ושוקולד – כך שלא יהיו 3 כדורים של וניל ברציפות (סדר הכדורים בגביע חשוב).

9. הוכיחו ש: $S(n,k)=\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{i}S(i,k-1)$, כאשר $S(n,k)$ הוא מספר החלוקות של קבוצה בת n איברים ל- k חלקים זרים לא ריקים כשאין חשיבות לסדר החלקים (מספרי סטירלינג מסוג שני).

10. הוכיחו ישירות (בלי שימוש בנוסחאות רקורסיביות) ש:
   א. $S(n,2)=2^{n-1}-1$.

ב. $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$.

11. נתבונן במצולע קמור בעל n קדקודים, אשר קדקודיו ממוספרים ב- $\{1,2,\ldots,n\}$. **שילוש** של המצולע מתקבל כך: מציירים את המצולע במישור ומוסיפים אלכסונים לא נחתכים דרך פנים המצולע. ממשיכים כל עוד האלכסונים אינם חוצים זה את זה. למשל, הנה שילוש של מצולע הכולל 6 קדקודים:



א. הוכיחו באינדוקציה שמספר האלכסונים שמועברים עד שהשילוש מסתיים הוא $n-3$.

ב. יהי $f(n)$ מספר הדרכים להעביר את האלכסונים. מצאו נוסחת נסיגה ל- $f(n)$.

ג. הוכיחו כי $f(n) = C(n-2)$, כאשר $C(n)$ הוא מספר קטלן (מספר הסדרות המאוזנות של n אפסים ו- n אחדים). מהי הנוסחה המפורשת ל- $f(n)$?

4.5. עקרון שובך היונים

הנושאים שיוצגו: *עקרון שובך היונים, הרחבות לעקרון שובך היונים, סדרה מונוטונית עולה ויורדת, יישומים בתורת המספרים, בגיאומטריה ובתורת הגרפים.*

עקרון שובך היונים, המכונה גם **עקרון דיריכלה**, הוא עקרון פשוט ואינטואיטיבי מאוד. יחד עם זאת, בעזרתו אפשר להוכיח תוצאות רבות ומעניינות שאינן טריוויאליות כלל וכלל. העובדה שבין כל 366 אנשים יהיו שניים שנולדו באותו יום בשנה נראית טריוויאלית, שכן יש 365 ימים בשנה. אולם העובדה שקיימים שני אנשים (לא קרחים) בעולם שיש להם בדיוק אותו מספר שערות, נראית קצת פחות ברורה - אף כי היא מתבססת על אותו עקרון. כדי להוכיח עובדה זו יש רק לשים לב שלאדם יש לכל היותר כמאה אלף שערות על הראש, ואילו בעולם כיום יש כשישה מיליארד אנשים. דוגמאות פשוטות אלה הן מקרים פרטיים של עקרון שובך היונים.

משפט 4.5.1 (עקרון שובך היונים): אם מכניסים $n+1$ יונים ל- n שובכים, אז קיים שובך שבו יש לפחות 2 יונים.
הוכחה: נניח בשלילה שבכל שובך יש לכל היותר יונה אחת. לכן, מספר היונים הכולל הוא לכל היותר n, בסתירה להנחתנו. □

הערה: הניסוח הפורמלי יותר של העיקרון אומר שאין פונקציה חח״ע מהקבוצה $\{1,2,...,n,n+1\}$ לקבוצה $\{1,2,...,n\}$.

עקרון שובך היונים מאפשר לנו להוכיח טענות מעניינות בתורת המספרים.

משפט 4.5.2: תהי $A = \{0,1,2,...,9\}$. בכל תת-קבוצה של A שבה 6 מספרים, יש שני מספרים שסכומם 9.
הוכחה: נחלק את A לחמש תת-קבוצות הבאות: $\{0,9\}, \{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{4,5\}$. סכום המספרים בכל תת-קבוצה הוא 9. נתייחס אל חמש התת-קבוצות כאל שובכים ואל כל אחד משישה המספרים שנבחרו כאל יונה. נכניס כל אחד משישה המספרים שנבחרו אל התת-קבוצה המתאימה לו. כך למשל המספר 5 יוכנס לשובך $\{4,5\}$. לפי עקרון שובך היונים יהיה שובך ובו שתי יונים. סכומם של שני המספרים המתאימים הוא 9 כנדרש. □

משפט 4.5.3: תהי X תת-קבוצה של $\{1,2,...,2n\}$ בת $n+1$ איברים. אז יש ב- X שני מספרים כך שהאחד מחלק את השני ללא שארית.
הוכחה: ניעזר בטענת עזר הבאה:

טענת עזר: כל מספר טבעי חיובי t אפשר להציג באופן יחיד כמכפלה של מספר אי-זוגי במספר שהוא חזקה של 2, כלומר קיימים $k, r \in \mathbb{N}$ כך ש- $t = 2^k(2r+1)$ (ראו תרגיל 5).

כעת, נניח ש- $X = \{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$. נציג כל מספר $x_i \in X$ בצורה המובטחת בטענת העזר, כלומר $x_i = 2^{k_i} b_i$, כאשר k_i מספר טבעי, ו- b_i מספר אי-זוגי, $1 \le b_1, b_2, ..., b_{n+1} \le 2n$. בקבוצה $\{1,2,...,2n\}$ יש בדיוק n מספרים אי-זוגיים, ולכן לפי עקרון שובך היונים, קיימים שני אינדקסים i,j כך ש- $b_i = b_j = b$. מכאן $x_i = 2^{k_i} b$, $x_j = 2^{k_j} b$. נניח ש- $k_i < k_j$. לכן:

$$\frac{x_j}{x_i} = \frac{2^{k_j} b_j}{2^{k_i} b_i} = 2^{k_j - k_i},$$

כלומר x_i מחלק את x_j ללא שארית.
שימו לב שהוכחנו בעצם יותר מהנאמר במשפט. דהיינו: בתת-קבוצה X כנ״ל יש שני מספרים $x_i, x_j \in X$ כך ש- $\frac{x_j}{x_i}$ לא רק מספר שלם, אלא אף חזקה שלמה של 2. □

הערה: החסם במשפט הדוק. כלומר, לכל n טבעי אפשר למצוא תת-קבוצה בת n איברים של $\{1,2,...,2n\}$ שאינם מתחלקים זה בזה (ראו תרגיל 2).

לפני שנעבור לדוגמה הבאה, נגדיר תחילה כמה מושגים.

הגדרה 4.5.4: נאמר שסדרה $(a_1,a_2,...,a_n)$ של מספרים ממשיים היא **סדרה מונוטונית עולה** אם $a_1 < a_2 < ... < a_n$. נאמר שזו **סדרה מונוטונית יורדת** אם $a_1 > a_2 > ... > a_n$. לעתים נאמר בקיצור שסדרה מונוטונית עולה (יורדת) היא פשוט סדרה עולה (יורדת).

הגדרה 4.5.5: תהי $A = (a_1,a_2,...,a_n)$ סדרה של מספרים ממשיים ויהיו $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$ מספרים טבעיים. הסדרה $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$ היא **תת-סדרה** של A.

מה בדבר הסדרה $(5,3,8,10,17,2,6,4,21,1)$? היא כמובן אינה עולה ואינה יורדת. אולם, אנו מוצאים בה תת-סדרה $5,8,10,17,21$ הבנויה מהאיברים a_1,a_3,a_4,a_5,a_9 שהיא לכשעצמה סדרה עולה. גם התת-סדרה $3,8,17$ היא סדרה עולה, אף כי קצרה יותר. אין קושי כמובן למצוא סדרות שאין להן תת-סדרה עולה ארוכה. אין גם קושי לבנות סדרות ללא תת-סדרות יורדות ארוכות. אבל כפי שמוכיח המשפט הבא, לא ניתן להימנע משניהם גם יחד.

משפט 4.5.6 (Erdős-Szekeres): בכל סדרה של n^2+1 מספרים ממשיים שונים זה מזה, יש תת-סדרה של לפחות $(n+1)$ מספרים שהיא יורדת או עולה.

הוכחה: יהי $s = n^2 + 1$ מספר האיברים בסדרה $A = (a_1,a_2,...,a_s)$. נייחס לכל אינדקס $1 \le i \le s$ זוג מספרים טבעיים (p_i,q_i) שיוגדרו כך: p_i הוא האורך המירבי של תת-סדרה עולה של A שהאיבר הראשון שלה הוא a_i. בדומה q_i הוא האורך המירבי של תת-סדרה יורדת של A שמתחילה ב- a_i.

כך למשל, בסדרה $A = (5,3,8,10,17,2,6,4,21,1)$, $n = 3$, ואורך הסדרה הוא $s = n^2 + 1 = 10$. מהו p_4? עלינו להביט בתת-סדרות עולות של A המתחילות ב- $a_4 = 10$. קל לראות ש- $10,17,21$ היא התת-סדרה העולה הארוכה ביותר שמתחילה שם, ולכן $p_4 = 3$. באופן דומה $q_4 = 4$ כי $10,6,4,1$ היא התת-סדרה היורדת הארוכה ביותר שמתחילה ב- a_4.

נחזור להוכחה. אם יש $1 \le i \le s$ כך ש- $p_i \ge n+1$, משמע שיש תת-סדרה עולה של A (המתחילה ב- a_i) באורך של לפחות $n+1$ כרצוי. בדומה, גם אם $q_i \ge n+1$ טענת המשפט הוכחה. נניח לכן בשלילה שלכל i מתקיים $1 \le p_i,q_i \le n$. לפי עקרון המכפלה, מספר הזוגות השונים מהצורה (x,y) כאשר x,y מספרים שלמים המקיימים $1 \le x,y \le n$ הוא n^2. לכן לפי עקרון שובך היונים מבין הזוגות $(p_1,q_1), (p_2,q_2),...,(p_s,q_s)$ חייבים להיות שני זוגות זהים, כיוון ש- $s = n^2 + 1$. כלומר יש שני אינדקסים $1 \le j < k \le n$ כך ש- $p_j = p_k$ וגם $q_j = q_k$. אולם במקרה זה נגיע לסתירה.

ואכן, אם $a_j < a_k$ אז בהכרח $p_j > p_k$. כדי לראות זאת נתבונן בתת-סדרה באורך p_k הארוכה ביותר שמתחילה ב- a_k. נוסיף לתחילתה את האיבר a_j. היות ש- $a_j < a_k$ נקבל תת-סדרה עולה ארוכה יותר שמתחילה ב- a_j ואורכה $p_k + 1$. לכן כנטען $p_j > p_k$. במקרה ש- $a_j > a_k$ אפשר להסיק בדומה כי $q_j > q_k$.

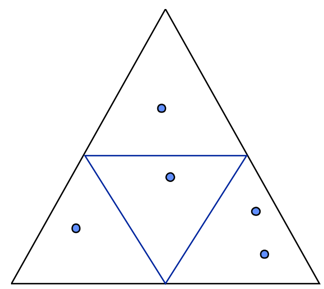
קיבלנו בכל מקרה סתירה ולכן לא ייתכן שלכל i מתקיים $1 \le p_i,q_i \le n$. משמע, יש תת-סדרה עולה או תת-סדרה יורדת באורך $n+1$ כפי שטענו. □

הערה: הטענה שלעיל היא הדוקה, כלומר יש סדרה מאורך n^2 שכל התת-סדרות העולות והתת-סדרות היורדות שלה הן באורך קטן או שווה ל- n (ראו תרגיל 8).

גם טענות מתחום הגיאומטריה אפשר להוכיח בעזרת עקרון שובך היונים.

משפט 4.5.7: צלף קולע 5 חצים לעבר מטרה שצורתה משולש שווה צלעות, שאורך צלעו שני מטרים. אם כל החצים פוגעים במטרה, אז יש בהכרח שני חצים שיפגעו במטרה במרחק של מטר אחד לכל היותר זה מזה.

הוכחה: נחלק את המשולש לארבעה משולשים קטנים שווי צלעות שאורך צלעם מטר, כמתואר בתרשים 4.5.1. קל לראות שהמרחק בין כל שתי נקודות במשולש קטן הוא לכל היותר מטר. לפי עקרון שובך היונים לפחות שני חצים נמצאים במשולש קטן אחד (או על שפתו), ומכאן נובעת התוצאה. □



תרשים 4.5.1: חלוקת המשולש ל- 4 משולשים קטנים שווי צלעות.

הערה: גם כאן המשפט הדוק. כלומר, אפשר לנעוץ במטרה 4 חצים כך שהמרחק בין כל שני חצים יהיה גדול ממטר (ראו תרגיל 3).

ולסיום נוכיח בעזרת העיקרון טענות מתחום תורת הגרפים. ננסח את הטענות במונחים שאינם מזכירים גרפים כל ועיקר, אולם תרגום הטענות למושגים מתורת הגרפים אינו מסובך.

משפט 4.5.8: בכל קבוצה של אנשים, יש לפחות שני אנשים שמכירים בדיוק אותו מספר אנשים בקבוצה (כאשר היכרות היא הדדית, זאת אומרת זהו יחס סימטרי).

הוכחה: תהי X קבוצת האנשים, כאשר $|X| = n$. נגדיר פונקציה $f{:}X\to\{0,1,...,n-1\}$ על ידי $f(x) = i$ אם אדם x מכיר בדיוק i אנשים. מטרתנו היא למצוא שני איברים שונים $x,y\in X$ כך ש- $f(x) = f(y)$. לכאורה יש קושי, הרי $|X| = n$ וגם הטווח של f כולל את n איברי הקבוצה $\{0,1,2,...,n-1\}$. יש להראות שהפונקציה f איננה יכולה להיות פונקציה על. למעשה נראה כי לא ייתכן שהטווח של f כולל את האיבר 0 ואת האיבר $n-1$ גם יחד. ואכן נניח כי $f(x) = n-1$, כלומר x מכיר $n-1$ אנשים. במקרה זה כולם מכירים את x ולכן אין אדם שלא מכיר איש. כלומר, לכל $y\in X$ מתקיים $f(y) > 0$. לכן, לא ייתכן שגם 0 וגם $n-1$ יהיו בטווח של f. לכן תחומה של הפונקציה f הוא קבוצה שגודלה n, ואילו גודל הטווח הוא לכל היותר $n-1$, ולכן לפי עקרון שובך היונים קיימים שני אנשים x,y שונים שעבורם $f(x) = f(y)$. □

במונחים של תורת הגרפים טענה זו תהיה: "בכל גרף לא מכוון יש שני קדקודים שדרגתם זהה".

לפני שנעבור לדוגמה הבאה נוכיח תחילה הרחבה פשוטה של עקרון שובך היונים.

סימון: יהי $x \in \mathbb{R}$ מספר ממשי. נסמן ב- $\lceil x \rceil$ את המספר השלם הקרוב ביותר ל- x מלמעלה. נסמן ב- $\lfloor x \rfloor$ את המספר השלם הקרוב ביותר ל- x מלמטה.

כך למשל, $\lceil 3.2 \rceil = 4$ ואילו $\lfloor 5.7 \rfloor = 5$. כשמדובר במספרים שליליים נקבל למשל, $\lceil -3.7 \rceil = -3$ ואילו $\lfloor -5.7 \rfloor = -6$.

משפט 4.5.9 (הרחבות לעקרון שובך היונים):

1. אם שמים $kn+1$ יונים ב- n שובכים, אז קיים שובך שבו יש לפחות $k+1$ יונים.
2. אם שמים m יונים ב- n שובכים, אז קיים שובך שבו יש לפחות $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ יונים.

הוכחה:

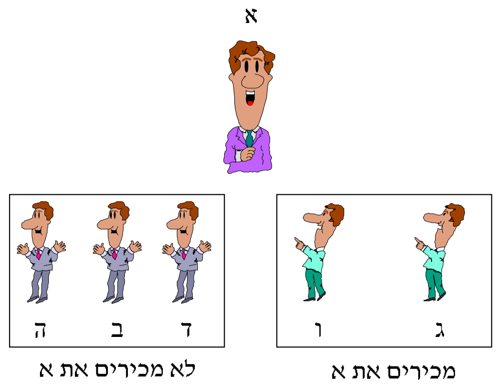
1. נניח בשלילה שהמשפט אינו נכון. לכן, בכל שובך יש לכל היותר k יונים, ולכן בכל השובכים יש לכל היותר nk יונים, וזו סתירה.
2. שוב נניח בשלילה שהמשפט אינו נכון, ונניח שבשובך i יש C_i יונים. לכן, $C_i < \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ לכל $1 \le i \le n$. אולם C_i הוא מספר שלם ולכן $C_i < \frac{m}{n}$. מכאן, $m = \sum_{i=1}^{n} C_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{n} = m$, וזו כמובן סתירה. □

משפט 4.5.10: בכל קבוצה של 6 אנשים יש 3 אנשים שמכירים זה את זה, או 3 אנשים שאינם מכירים זה את זה (כאשר היכרות היא הדדית).

הוכחה: נסמן את האנשים ב- א', ב', ג', ד', ה', ו'. נבחר אחד מהאנשים - נניח את א' - ונחלק את יתר האנשים לשני חדרים. בחדר אחד יהיו האנשים שמכירים את א' ובחדר השני האנשים שלא מכירים את א' (ראו תרשים 4.5.2). לפי ההרחבה לעקרון שובך היונים, באחד החדרים יש לפחות $3 = \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil$ אנשים. ייתכנו שני מקרים:

1. בחדר הראשון יש 3 אנשים שמכירים את א': אם יש שניים מביניהם המכירים זה את זה, אז יחד עם א' הם מהווים שלושה אנשים המכירים זה את זה. אם זה אינו המצב, משמע ששלושתם לא מכירים זה את זה, ושוב סיימנו.
2. בחדר השני יש 3 אנשים שלא מכירים את א': אם יש שניים מביניהם שאינם מכירים זה את זה, אז יחד עם א' נקבל שלושה אנשים שאינם מכירים זה את זה. אחרת, שלושתם מכירים זה את זה וסיימנו.

בכך הושלמה ההוכחה. □



תרשים 4.5.2: חלוקת האנשים לחדרים בהוכחת משפט 4.5.10.

המסקנה האחרונה היא מקרה פרטי של **משפט הצביעה של רמזי Ramsey**, הדן בצביעות של גרפים. במונחים של תורת הגרפים הטענה היא: "נצבע כל אחת מצלעותיו של הגרף השלם K_6 באדום או בכחול. אז יש ב-K_6 משולש הצבוע בצבע אחד". אנו נעסוק באריכות במשפטים אלה בסעיף 5.7 העוסק בבעיות קיצון בגרפים.

תרגילים

1. א. הוכיחו שבכל קבוצה של 12 מספרים שלמים יש שניים שהפרשם מתחלק ב- 11 ללא שארית.
   ב. האם בכל קבוצה של 12 מספרים שלמים יש שניים שסכומם מתחלק ב- 11 ללא שארית?

2. הוכיחו כי לכל n טבעי אפשר למצוא תת-קבוצה בת n איברים של $\{1,2,...,2n\}$ שאינם מתחלקים זה בזה.

3. נתונה מטרה שצורתה משולש שווה צלעות, שאורך צלעו שני מטרים. הוכיחו כי אפשר לנעוץ במטרה 4 חצים כך שהמרחק בין כל שני חצים יהיה גדול ממטר אחד.

4. צלף יורה n^2+1 חצים למטרה שצורתה משולש שווה צלעות, שאורך צלעו מטר אחד. הוכיחו שיש שני חצים שמרחקם זה מזה לכל היותר $\frac{1}{n}$ מטרים.
   אתגר: הוכיחו כי החסם הדוק.

5. הוכיחו כי כל מספר טבעי חיובי t אפשר להציג באופן יחיד כמכפלה של מספר אי-זוגי במספר שהוא חזקה של 2, כלומר קיימים $k,r\in \mathbb{N}$ יחידים כך ש- $t = 2^k(2r+1)$.

6. א. יהיו $m_1,m_2,...,m_n$ מספרים שלמים שהממוצע שלהם גדול מ- k, כלומר:
   $$\frac{m_1+m_2+...+m_n}{n} > k,$$
   כאשר k מספר שלם. הוכיחו שקיים $1 \le i \le n$ כך ש: $m_i \ge k+1$.

ב. נסדר את המספרים $1,2,...,10$ סביב מעגל בסדר כלשהו. הוכיחו שקיימים 3 מקומות רצופים על המעגל שסכומם לפחות 17.

7. תנו הוכחה חלופית למשפט 4.5.6 באופן הבא. הגדירו לכל אינדקס i את הערך p_i שהוא האורך המירבי של תת-סדרה עולה של $A = (a_1,\ldots,a_s)$ המתחילה ב- a_i, כאשר $s = n^2+1$. אם p_i כלשהו מקיים $p_i \geq n+1$, מצאנו תת-סדרה עולה באורך של לפחות $n+1$ כנדרש. אחרת, נניח בשלילה שלכל $1 \leq i \leq n^2+1$ מתקיים $p_i \leq n$. לכן, לפי ההרחבה לעקרון שובך היונים, לפחות $\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil = n+1$ מהמספרים p_i זהים. הביטו ב- $n+1$ איברי הסדרה A שעבורם ערכי p_i זהים והוכיחו כי זו תת-סדרה יורדת של A. הסיקו מכך את המשפט.

8. הראו שלכל n טבעי קיימת סדרה של n^2 מספרים ממשיים, כך שכל תת-סדרה עולה וכל תת-סדרה יורדת שלה היא באורך קטן או שווה ל- n.

4.6. עקרון ההכלה וההדחה

הנושאים שיוצגו: *עקרון ההכלה וההדחה לשתי קבוצות, עקרון ההכלה וההדחה ל-n קבוצות, הפונקציה של אוילר, תמורות ללא נקודות שבת.*

ראינו במשפט **4.1.1** שאם A,B שתי קבוצות סופיות וזרות אז $|A\cup B| = |A| + |B|$. אולם מהי עוצמת הקבוצה $A\cup B$ כאשר A,B אינן זרות? במקרה זה באגף ימין של השוויון האחרון, נספרו איברי קבוצת החיתוך $A\cap B$ פעמיים. מכאן אנו מקבלים את הטענה הפשוטה הבאה (שכבר הוכחה בדרך אחרת במסקנה **4.1.11**).

טענה 4.6.1: תהיינה A,B קבוצות סופיות כלשהן. אז $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

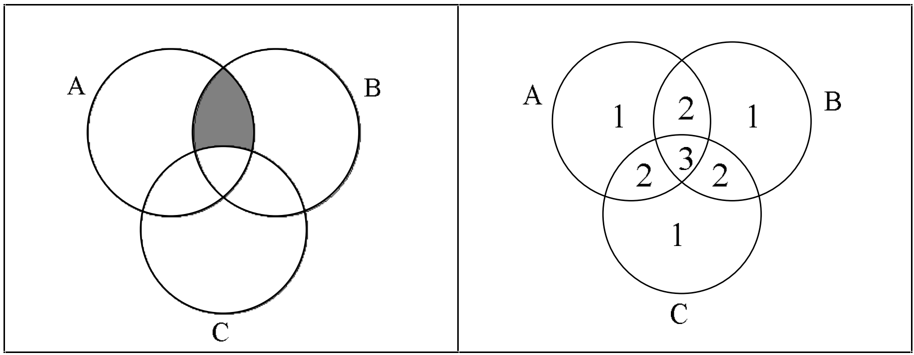
דוגמה 4.6.2: בכיתה מסוימת לומדים 15 תלמידים אלגברה, 12 לומדים מתמטיקה בדידה, ו- 9 תלמידים לומדים את שני הקורסים. כמה תלמידים לומדים לפחות את אחד משני הקורסים?
תהיינה A קבוצת התלמידים שלומדים אלגברה, ו- B קבוצת התלמידים שלומדים מתמטיקה בדידה. אם כן, $|A| = 15,\ |B| = 12$. קבוצת התלמידים שלומדים את שני הקורסים היא $A\cap B$ וגודלה $|A\cap B| = 9$. קבוצת התלמידים שלומדים לפחות את אחד משני הקורסים היא $A\cup B$, ועל פי הטענה גודלה הוא $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 15 + 12 - 9 = 18$.

כיצד נחשב את עוצמת האיחוד של שלוש קבוצות A,B,C שאינן בהכרח זרות? לא קשה להשתכנע כי:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

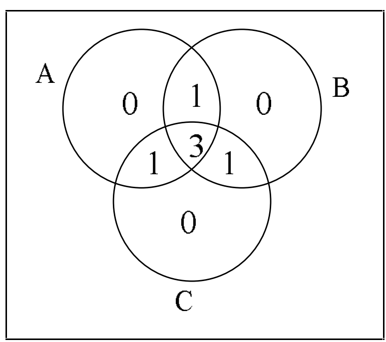
נשתכנע באמיתות הנוסחה באמצעות דיאגרמות ון. שוב, כמו במקרה של שתי קבוצות, נסכם את גדלי הקבוצות. אולם כאשר הקבוצות אינן זרות, יימנו איברים מסוימים כמה פעמים וזאת עלינו לתקן כך שכל איבר ב- $A\cup B\cup C$ יימנה בדיוק פעם אחת. נשים לב כי בביטוי $|A| + |B| + |C|$

נמנה כל איבר מספר שונה של פעמים לפי האזור בדיאגרמת ון שאליו הוא שייך, כפי שמדגים תרשים **4.6.1** מימין. בתוך כל אזור בתרשים רשמנו את מספר הפעמים שנמנה כל איבר בביטוי $|A| + |B| + |C|$.



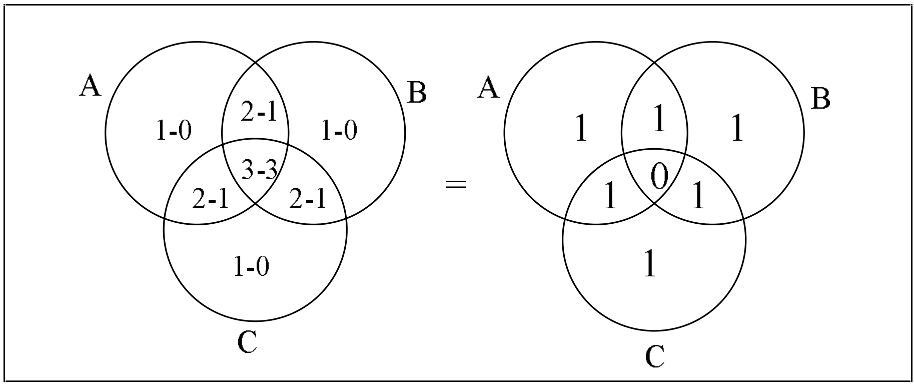
תרשים 4.6.1 : מימין, מפקד האיברים בביטוי $|A| + |B| + |C|$, משמאל, מודגש האזור $(A\cap B)\setminus C$.

נביט למשל באזור המודגש בתרשים **4.6.1** משמאל. כאן אנו דנים באיברי הקבוצה $(A\cap B)\setminus C$. כל איבר באזור זה נמנה בביטוי $|A| + |B| + |C|$ פעמיים : פעם אחת כאיבר של A ופעם כאיבר של B, אך אינו נמנה כאיבר של C. כך אפשר להוכיח באופן מלא את המפקד של כל האזורים בתרשים **4.6.1** מימין. כצפוי האיברים השייכים לחיתוכי הקבוצות נמנו בעודף. ננסה לתקן זאת על ידי החסרת הביטוי $|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|$. בביטוי זה נמנה כל איבר כך :



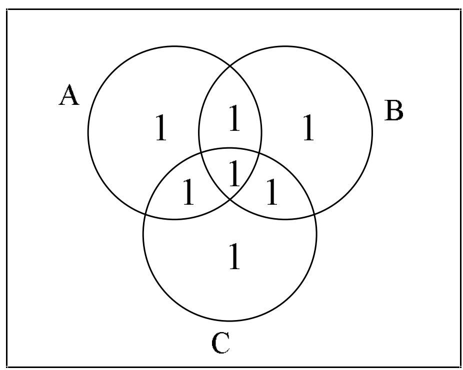
תרשים 4.6.2 : מפקד האיברים בביטוי $|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|$.

כמה פעמים נמנה כל איבר בביטוי $|A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C|$? נחזור ונעדכן את המפקד עד כה על ידי החסרת שני המפקדים.



תרשים 4.6.3 : המפקד לאחר החסרת החיתוכים של שתי קבוצות.

אנו כבר קרובים למטרתנו, והיא מניית כל איבר בדיוק פעם אחת. הפגם היחיד הוא שאיברי החיתוך $A\cap B\cap C$ נמנים עתה 0 פעמים. נתקן את המצב על ידי הוספת המחובר $|A\cap B\cap C|$. הביטוי הסופי הוא $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$, וכעת מתקבל המפקד הרצוי.



תרשים 4.6.4 : המפקד הסופי בו כל איבר נמנה פעם אחת.

כל מה שראינו עד כה הוא מקרה פרטי של משפט ההכלה וההדחה.

משפט 4.6.3 (עקרון ההכלה וההדחה) תהיינה $A_1,A_2,\dots,A_n$ קבוצות סופיות. אז :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|$$

הוכחה: ההוכחה הכללית אינה אלא הרחבה של ההוכחה שראינו למקרה של שלוש קבוצות. על מנת להראות את השוויון בין שני האגפים במשפט, נתבונן באיבר $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, ונראה שבאגף ימין של השוויון x נספר בדיוק פעם אחת כנדרש. בהוכחה של המשפט עבור שלוש קבוצות, היה מספר המופעים של x תלוי בסוג האזור בדיאגרמת ון שאליו השתייך x. נניח לכן ש- x שייך בדיוק ל- t מתוך הקבוצות $A_1,A_2,...,A_n$, כאשר $1\le t\le n$. מספר הדרכים לבחור r קבוצות מתוך t קבוצות הוא $\binom{t}{r}$. לכן, אם x שייך ל- t קבוצות, הוא שייך גם לכל אחד מ- $\binom{t}{r}$ החיתוכים של r קבוצות מתוך t הקבוצות האלה. לכן בסה"כ x נספר באגף ימין:

- $\binom{t}{1}$ פעמים במחובר $\sum_{i=1}^{n}|A_i|$.
- $-\binom{t}{2}$ פעמים במחובר $\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$ שכולל את כל החיתוכים של שתי קבוצות.
- $\binom{t}{3}$ פעמים במחובר $\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$.
- וכך הלאה עד ל- $(-1)^{t-1}\binom{t}{t}$ פעמים במחובר ה- t.
- ואילו בכל המחוברים הבאים שכוללים חיתוכים של יותר מ- t קבוצות, x איננו נספר כלל.

בסה"כ קיבלנו שבאגף ימין x נספר:

$$\binom{t}{1}-\binom{t}{2}+\binom{t}{3}-...+(-1)^{t-1}\binom{t}{t}=\sum_{i=1}^{t}(-1)^{i-1}\binom{t}{i}=1-\sum_{i=0}^{t}(-1)^{i}\binom{t}{i}=1$$

כאשר השוויון האחרון נובע ממשפט 4.3.10. נעיר גם שאם $x\notin\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ אז הוא אינו נספר לא באגף ימין ולא באגף שמאל, ולכן יש שוויון בין שני האגפים. □

דוגמה 4.6.4: כל תלמיד שנה א' לומד לפחות אחד משלושת הקורסים הבאים - מחשבים, אנגלית, מתמטיקה. רישום התלמידים לקורסים נעשה על פי הטבלה הבאה:

שמות הקורסים	מספר תלמידים רשומים
מחשבים	25
אנגלית	20
מתמטיקה	33
מחשבים ואנגלית	15
מחשבים ומתמטיקה	25
אנגלית ומתמטיקה	20
מחשבים, אנגלית ומתמטיקה	15

כמה תלמידים יש בסה"כ בשנה א'?
תהיינה A_1,A_2,A_3 קבוצות התלמידים הלומדות בכל אחד משלושת הקורסים, כאשר A_1 היא קבוצת התלמידים הלומדים מחשבים, A_2 התלמידים הלומדים אנגלית ו- A_3 לומדי המתמטיקה. על פי נתוני השאלה מתקיים:
$|A_1| = 25, |A_2| = 20, |A_3| = 33, |A_1\cap A_2| = 15, |A_1\cap A_3| = 25, |A_2\cap A_3| = 20, |A_1\cap A_2\cap A_3| = 15$.
לכן לפי עקרון ההכלה וההדחה מספר תלמידי שנה א' הוא:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (25+20+33)-(15+25+20)+15 = 33 .$$

מתברר שבמקרה זה כולם לומדים מתמטיקה. האם תוכלו להיווכח במסקנה זו גם באופן אחר?

לעתים קרובות איננו רוצים לחשב את עוצמת האיחוד של קבוצה, אלא למנות את מספר כל האיברים שאינם שייכים לאיחוד זה. במקרים אלה שימושית המסקנה הבאה הנובעת ישירות מעקרון ההכלה וההדחה.

מסקנה 4.6.5: תהיינה $A_1,A_2,...,A_n \subseteq S$ קבוצות סופיות. אז,

$$|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |S| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

הפונקציה של אוילר

בעזרת עקרון ההכלה וההדחה אפשר להוכיח טענות שימושיות מתורת המספרים. נפתח בטענת עזר פשוטה.

טענה 4.6.6: לכל $x,n \in \mathbb{N}^+$ יש בדיוק $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ מספרים טבעיים שקטנים מ-n ומתחלקים ב- x.

הוכחה: יהיו $x, 2x, 3x,..., kx$ כל המספרים שמתחלקים ב- x וקטנים מ- n. לכן, $k \le n/x$. אולם k מספר טבעי ולכן, $k = \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$. □

דוגמה 4.6.7: תהי $X = \{1,2,3,...,600\}$. כמה מספרים יש ב- X שאינם מתחלקים ב- 3, ב- 5 וב- 7?
תהיינה A_1 קבוצת המספרים ב- X שמתחלקים ב- 3, A_2 קבוצת המספרים ב- X שמתחלקים ב- 5, ו- A_3 המספרים שמתחלקים ב- 7.
לכן, קבוצת המספרים ב- X שלא מתחלקים ב- 3, ב- 5 וב- 7 היא הקבוצה $X\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3)$. לפי טענה 4.6.6:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = 200 \ , \ |A_2| = \left\lfloor \frac{600}{5} \right\rfloor = 120 \ , \ |A_3| = \left\lfloor \frac{600}{7} \right\rfloor = 85 .$$

הקבוצה $A_1\cap A_2$ היא קבוצת כל המספרים המתחלקים ב- 3 וב- 5, כלומר מספרים המתחלקים ב- 15. לכן:

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{600}{15} \right\rfloor = 40.$$

באופן דומה אפשר להראות ש-

$$|A_1 \cap A_3| = 28, \quad |A_2 \cap A_3| = 17, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5.$$

בסה"כ נקבל על פי עקרון ההכלה וההדחה שמספר המספרים שלא מתחלקים ב- 3, ב- 5 וב- 7 הוא:

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 600 - (200 + 120 + 85) + (40 + 28 + 17) - 5 = 275.$$

בעזרת שיטות דומות אפשר למצוא מהי פונקצית אוילר, שהיא פונקציה רבת חשיבות באלגברה ובתורת המספרים. אולם תחילה נגדיר את הפונקציה. כזכור בסעיף 3.4, ראינו שהמחלק המשותף המקסימלי של שני מספרים טבעיים a,b הוא המספר הטבעי המקסימלי שמחלק גם את a וגם את b.

הגדרה 4.6.8: יהיו $a,b \in \mathbb{N}$. המספרים a,b נקראים **זרים** זה לזה אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1.

שימו לב, מספרים זרים אינם חייבים להיות ראשוניים. בהחלט ייתכן שיש להם מחלקים, אבל לא מחלקים משותפים. כך למשל, המספרים 8,9 זרים.

הגדרה 4.6.9: פונקצית אוילר היא הפונקציה $\phi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ המוגדרת כך: $\phi(1) = 1$ ולכל $n > 1$, $\phi(n)$ הוא מספר המספרים הטבעיים מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ שזרים ל- n.

משפט 4.6.10: יהי $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ותהיה $p_1,p_2,...,p_k$ רשימת כל המספרים הראשוניים השונים המחלקים את n. אז $\phi(n) = n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})$.

הוכחה: לפי הגדרת פונקצית אוילר, $\phi(n)$ הוא מספר המספרים מתוך הקבוצה $S = \{1,2,...,n\}$ שזרים ל- n. נשים לב שאם $t \in S$ אינו זר ל- n, אז יש להם בהכרח מחלק משותף ראשוני. לכן, המספרים n,t אינם זרים אם ורק אם המספר t מתחלק באחד המספרים הראשוניים $p_1,p_2,...,p_k$ המחלקים את n. עלינו למצוא, אם כן, את מספר האיברים בקבוצה S שאינם מתחלקים באף אחד מהמספרים $p_1,p_2,...,p_k$.
תהי A_i קבוצת כל המספרים ב-S שמתחלקים ב- p_i, כאשר $1 \le i \le k$. על פי טענה 4.6.6, $|A_i| = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor$. אולם p_i מחלק את n, ולכן $\frac{n}{p_i}$ מספר שלם. מכאן, $|A_i| = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor = \frac{n}{p_i}$. באופן דומה, הקבוצה $A_i \cap A_j$ מכילה את כל המספרים המתחלקים ב- p_i וב- p_j, כלומר מספרים המתחלקים ב- p_ip_j. לכן גודלה הוא $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_ip_j}$.

בדומה אפשר לחשב את גודלה של הקבוצה $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_t}$ הכוללת את כל המספרים המתחלקים ב- $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot ... \cdot p_{i_t}$, כאשר $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_t \le n$. על פי עקרון ההכלה וההדחה (מסקנה 4.6.5) נקבל:

$$\begin{aligned}\phi(n) &= |S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)| \\ &= n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{n}{p_i p_j} - ... + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} \\ &= n\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{p_i p_j} - ... + (-1)^k \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k}\right) \\ &= n \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\end{aligned}$$

השוויון האחרון נובע מכך שכאשר מפתחים את המכפלה $\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$, בוחרים מכל סוגריים את ה- 1 או את ה- $-\frac{1}{p_i}$ המתאים. אם מכל הסוגריים נבחר 1 נקבל בסה"כ 1. אותם מחוברים שבהם בוחרים מסוגריים מסוימים את $-\frac{1}{p_i}$ ומיתר הסוגריים בוחרים 1, יתרמו בסה"כ $-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}$. מחוברים שבהם נבחר את $-\frac{1}{p_i}$ ואת $-\frac{1}{p_j}$ ומיתר הסוגריים נבחר 1, יתרמו $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i p_j}$ וכך הלאה. □

לעתים קרובות כאשר משתמשים בעקרון ההכלה וההדחה, לכל החיתוכים של מספר שווה של קבוצות יש עוצמה זהה. במקרים אלה קל יחסית להשתמש בעקרון ההכלה וההדחה כפי שמדגימה הדוגמה הבאה.

דוגמה 4.6.11: נתונה חפיסה של 52 קלפים. בכמה דרכים אפשר לבחור במשחק ברידג' "יד" שכוללת לפחות מלך אחד, מלכה אחת, נסיך אחד ואס אחד? לקוראים שאינם חובבי ברידג' נאמר ש"יד" בברידג' היא פשוט בחירה של 13 קלפים מתוך 52 הקלפים שבחבילה, וכן נזכיר שבחפיסת קלפים יש 4 קלפים מכל סוג, ולכן יש 4 מלכים, 4 מלכות, 4 נסיכים ו- 4 אסים.
תהי S קבוצת כל הידיים האפשריות, ונסמן ב- A_1, A_2, A_3, A_4 את כל הידיים ללא מלכים, מלכות, נסיכים ואסים בהתאמה.

לכן, ברצוננו למצוא את עוצמת הקבוצה $\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{4} A_i\right|$. קל לראות ש- $|S| = \binom{52}{13}$.

נחשב כעת את מספר הדרכים לבחור יד ללא סוג מסוים של קלף (למשל, ללא מלכים). במקרה זה $|A_i| = \binom{48}{13}$ לכל $1 \le i \le 4$, וזאת מכיוון שצריך לבחור 13 קלפים מתוך $48 = 52-4$ הקלפים שנותרו לאחר שמורידים את סוג הקלף האסור.

כמו-כן, $|A_i \cap A_j| = \binom{44}{13}$ לכל $1 \le i < j \le 4$, כי הפעם עלינו להוריד שני סוגים של קלפים אסורים (מלכים ומלכות או מלכים ונסיכים וכדומה). מספר הזוגות $1 \le i < j \le 4$ הוא כמובן $\binom{4}{2}$.

באותו אופן נקבל כי $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{40}{13}$ לכל $1 \le i < j < k \le 4$, כאשר מספר השלשות $1 \le i < j < k \le 4$ הוא $\binom{4}{3}$. ואילו $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{36}{13}$.

נשתמש כעת בעקרון ההכלה וההדחה (מסקנה 4.6.5), ונקבל שמספר הידיים החוקיות הוא:

$$\begin{aligned}\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| &= |S| - \sum_{i=1}^{4}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 4}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le 4}|A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= \binom{52}{13} - \binom{4}{1}\cdot\binom{48}{13} + \binom{4}{2}\cdot\binom{44}{13} - \binom{4}{3}\cdot\binom{40}{13} + \binom{4}{4}\cdot\binom{36}{13}\end{aligned}$$

באופן כללי במקרים שבהם נתונות לנו n קבוצות, ועוצמת החיתוך של k קבוצות כלשהן מתוכן שווה עבור כל k קבוצות שניקח - כל שעלינו לעשות הוא למצוא את עוצמת החיתוך הזה, ואז להכפילו במספר החיתוכים האפשריים של k קבוצות שהוא כמובן $\binom{n}{k}$. כך נקבל את גודלו של המחובר הכולל את כל החיתוכים של k קבוצות. נראה כעת דוגמה נוספת לשימוש בעקרון זה.

תמורות ללא נקודות שבת

בסעיף 4.4, דנו בתמורות ללא נקודות שבת ומצאנו נוסחת נסיגה המתארת את מספר התמורות מסדר n ללא נקודות שבת. נפתור כעת את הבעיה על ידי שימוש בעקרון ההכלה וההדחה. כזכור, ניתן היה לנסח בעיה זו גם בדרך ציורית יותר באופן הבא:

n אנשים נכנסים למסעדה ותולים את כובעיהם על קולב. בסיום הארוחה כל אחד לוקח כובע כלשהו. בכמה דרכים הם יכולים לקחת את כובעיהם כך שאיש מביניהם לא יקבל את הכובע שלו בחזרה? במונחים פורמליים יותר, שואלת הבעיה הזו מהו מספר התמורות ללא נקודות שבת של הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$. אם לכל i, אדם i מקבל את הכובע π_i, אז אדם שקיבל את כובעו מתאים לנקודת שבת של התמורה π.

משפט 4.6.12: מספר הדרכים לחלק את n הכובעים כך שאף אדם לא יקבל את הכובע שלו בחזרה הוא $n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ (ובמילים אחרות, זהו מספר התמורות של $\{1,...,n\}$ ללא נקודות שבת).

הוכחה: תהי S קבוצת כל הדרכים לקחת את הכובעים. לכן, $|S| = n!$ כמספר התמורות של n איברים. תהי A_i קבוצת כל הדרכים לקחת את הכובעים בסיום כך שאדם מספר i מקבל את כובעו בחזרה, כאשר $1 \le i \le n$. הפתרון המבוקש לבעיה הוא עוצמתה של הקבוצה $S\setminus(A_1\cup A_2\cup...A_n)$.
קל לראות כי $|A_i| = (n-1)!$, כיוון שמדובר בסידורים שבהם אדם מספר i קיבל את כובעו בוודאות, ואת יתר $(n-1)$ הכובעים מחלקים ל- $(n-1)$ אנשים בכל הדרכים האפשריות. מכיוון שיש n קבוצות $A_1,A_2,...,A_n$ נקבל בסה"כ כי:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| = n(n-1)!\ .$$

באופן דומה $|A_i\cap A_j| = (n-2)!$, מפני ששוב כובעים i,j חוזרים לבעליהם ואת שאר $(n-2)$ הכובעים ניתן לסדר בכל $(n-2)!$ הדרכים האפשריות. מספר הבחירות של שני אינדקסים $1 \le i < j \le n$ הוא $\binom{n}{2}$, ולכן נקבל:

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right| = \binom{n}{2}(n-2)!\ .$$

באופן כללי, בהינתן k אינדקסים כלשהם $i_1,i_2,...,i_k$ כאשר $1\le i_1 < i_2 <...< i_k \le n$, הקבוצה $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap...\cap A_{i_k}$ כוללת את כל הסידורים שבהם האנשים $i_1,i_2,...,i_k$ מקבלים את כובעיהם, ואת יתר $(n-k)$ הכובעים מחלקים ליתר האנשים בדרך כלשהי. לכן גודלה של הקבוצה הוא $|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap...\cap A_{i_k}| = (n-k)!$. מספר הדרכים לבחור k אינדקסים כאלה הוא כמובן $\binom{n}{k}$. מכאן:

$$\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}|A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}| = \binom{n}{k}(n-k)!\ .$$

בפרט, $|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n| = 1$ כי יש דרך אחת בדיוק לחלק את הכובעים כך שכל אדם יקבל את כובעו. על פי עקרון ההכלה וההדחה נקבל כי:

$$\left|S\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| = n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-...+(-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

ובזאת מסתיימת ההוכחה. □

הערה: ניתן לראות (ואולי כבר ראיתם זאת בקורס בחשבון דיפרנציאלי), שהטור $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ מתכנס כש- $n\to\infty$ אל המספר $1/e$. משמע, שמכלל $n!$ התמורות של $\{1,2,...,n\}$, מספרן של התמורות ללא נקודת שבת הוא בערך $n!/e$. בפרט, התמורות ללא נקודת שבת מהוות בערך $1/e$ מכלל התמורות (כש- n גדול). הערה זו מאירה נקודה מפתיעה: נניח שנשאלתם מה ההסתברות שלתמורה מקרית מסדר n אין נקודות שבת. בפרט, איך תלויה הסתברות זו בערכו של n? ניחוש צפוי הוא שההסתברות עולה עם n, או אולי יורדת עם n. מתברר (בדקו!) שההסתברות מתנדנדת בין ערכים זוגיים ואי-זוגיים של n, ובגבול כש- $n\to\infty$ ההסתברות היא $1/e$.

תרגילים

1. הוכיחו את משפט ההכלה וההדחה **באינדוקציה**.

2. בכמה דרכים אפשר לבחור 5 קלפים מתוך חבילה של 52 קלפים, כך שבין 5 הקלפים יש לפחות קלף אחד מכל סוג (לב, יהלום, עלה, תלתן)?

3. מצאו את מספר הפתרונות במספרים שלמים למשוואה:
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 20, \quad 1 \le x_1,\dots,x_6 \le 4$.

הדרכה:

א. עברו תחילה למשוואה חדשה שקולה שבה $0 \le x_1,...,x_6 \le 3$.

ב. הגדירו לכל $1 \le i \le 6$ קבוצה A_i שהיא קבוצת כל הפתרונות במספרים שלמים אי-שליליים למשוואה החדשה שבהם $x_i > 3$ (כלומר פתרונות שבהם x_i חורג מתנאי הפתרון). כמו-כן הגדירו את S בתור קבוצת כל הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה (כלומר פתרונות שבהם $x_i \ge 0$). כעת השתמשו בעקרון ההכלה וההדחה.

4. בכמה דרכים שונות ניתן לקבל את הסכום 18 **בסדרה** של 4 הטלות של קוביית משחק (על הקוביה רשומים המספרים $1,2,3,4,5,6$). שימו לב, הסדר של 4 הטלות הקוביה חשוב!

5. n אנשים נכנסים למסעדה. לכל אחד מהם מעיל ומטריה. בסיום הארוחה הם ממהרים לעזוב וכל אחד מהם לוקח מעיל ומטריה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל בחזרה הן את מעילו והן את מטרייתו (ייתכן שמישהו יקבל את המעיל או המטריה שלו, אך לא את שניהם)?

6. מצאו בעזרת עקרון ההכלה וההדחה את מספר הפונקציות $f: \{1,2,...,m\}\to\{1,2,...,n\}$ שהן על, כאשר $m \ge n$?

7. בתרגיל זה נראה הוכחה חלופית למשפט ההכלה וההדחה. נניח כי $A_1,A_2,...,A_n\subseteq S$ קבוצות סופיות. תהי $f_i:S\to\{0,1\}$ הפונקציה המציינת של הקבוצה A_i, כלומר

$$f_i(x)=\begin{cases}0, & x\notin A_i\\ 1, & x\in A_i\end{cases}.$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f_i\cdot f_j$ המוגדרת על ידי $f_i\cdot f_j(x) = f_i(x)\cdot f_j(x)$ היא הפונקציה המציינת של $A_i\cap A_j$, הפונקציה המציינת של $A_i\cap A_j\cap A_k$ היא $f_i\cdot f_j\cdot f_k$, וכך הלאה. באופן כללי $\prod_{i\in I} f_i$ היא הפונקציה המציינת של $\bigcap_{i\in I} A_i$ לכל קבוצה $I\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ של אינדקסים.

ב. $\sum_{x\in S} f_i(x)\cdot f_j(x)=|A_i\cap A_j|$, $\sum_{x\in S} f_i(x)\cdot f_j(x)\cdot f_k(x)=|A_i\cap A_j\cap A_k|$ וכך הלאה.

ג. הפונקציה $f=\prod_{i=1}^{n}(1-f_i)$ היא הפונקציה המציינת של $S\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

ד. הסיקו כי $\sum_{x\in S} f(x)=\left|S\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$.

ה. ודאו כי:

$$\begin{aligned}f(x)&=\prod_{i=1}^{n}(1-f_i(x))\\&=1-\sum_{i=1}^{n} f_i(x)+\sum_{1\le i<j\le n} f_i(x)\cdot f_j(x)-\ldots+(-1)^n f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)\end{aligned}$$

ו. הסיקו כי:

$$\begin{aligned}\left|S\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|&=\sum_{x\in S} f(x)\\&=|S|-\sum_{i=1}^{n} f_i(x)+\sum_{1\le i<j\le n} f_i(x)\cdot f_j(x)-\sum_{1\le i<j<k\le n} f_i(x)\cdot f_j(x)\cdot f_k(x)+\ldots\\&=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots\end{aligned}$$

4.7. הרחבות למקדמים הבינומיים

הנושאים שיוצגו: *המקדמים הבינומיים עבור מספר ממשי, מקדמים מולטינומיים.*

בבעיות מסוימות שימושי להרחיב את הגדרת המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ גם למספר ממשי n כלשהו (ראו למשל סעיף 6.3 העוסק בפונקציות יוצרות).

הגדרה 4.7.1: יהי k מספר טבעי ו- x מספר ממשי כלשהו. נגדיר:

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

נשים לב שמהגדרה זו נובע שאם n,k שני מספרים טבעיים המקיימים $k>n$, אז:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n)\cdots(n-k+1)}{k!}=0$$

ועובדה זו אכן מתיישבת עם האינטואיציה הקומבינטורית של המקדמים הבינומיים, בתור מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך n ללא חזרות כשהסדר אינו חשוב, שכן אם $k>n$ אין אף דרך לעשות זאת.

דוגמה 4.7.2: נראה ש- $\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{(-1)^n}{4^n}\cdot\binom{2n}{n}$.

ואכן, לפי הגדרת המקדמים הבינומיים מתקיים:

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\cdot\frac{1}{n!}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(2n-1)\cdot2n}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)\cdot2n}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{(2n)!}{(2\cdot1)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdots(2\cdot n)}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\\
&= \frac{(-1)^n}{4^n}\cdot\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

בשוויון השלישי כפלנו את המונה ואת המכנה ב- $2\cdot4\cdot6\cdots2n$.

ניתן גם להכליל את נוסחת הבינום של ניוטון באופן הבא. המשפט ניתן כאן ללא הוכחה מפני שהוכחתו דורשת ידע מתקדם באנליזה מתמטית, מעבר למה שאנו מניחים בספר זה.

משפט 4.7.3: יהיו a, x מספרים ממשיים, כאשר $|x|<1$. אז $(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$.

המקדמים המולטינומיים

כפי שראינו בסעיף 4.2, טענה 4.2.15, מספר המילים שניתן לבנות מ- a סימני 0 ו- b סימני 1 הוא $\binom{a+b}{a}$. נניח שברצוננו ליצור מילים הכוללות a סימני 0, b סימני 1 ו- c סימני 2. מה מספרן? לא קשה לראות שמספר המילים האפשריות הוא $\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$. הסיבה לכך היא שהאורך הכולל של מילה כזאת הוא a+b+c. נבחר תחילה את מיקומם של a האפסים. זאת אפשר לעשות ב- $\binom{a+b+c}{a}$ דרכים. כעת מתוך b+c המקומות הפנויים הנותרים נבחר היכן לשים את b האחדים. זאת ניתן לעשות ב- $\binom{b+c}{b}$ דרכים. ביתר המקומות הפנויים יופיעו כמובן c סימני ה- 2. מספר המילים האפשריות יהיה לכן:

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\frac{(a+b+c)!}{a!(b+c)!}\cdot\frac{(b+c)!}{b!c!}=\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}.$$

באופן דומה מוכיחים את המשפט הבא.

משפט 4.7.4: מספר המילים שאפשר לבנות מהסימנים $\{1,2,...,k\}$ הכוללות n_i סימני i עבור $1 \le i \le k$ הוא $\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

הוכחה: באינדוקציה על k.

בסיס האינדוקציה: $k = 1$, יש רק מילה אחת הכוללת n_1 סימני 1 והיא המילה $\underbrace{1,1,...,1}_{n_1}$. ואכן $\frac{n_1!}{n_1!}=1$.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $k-1 \ge 1$ ונוכיח למקרה שבו יש לנו $k > 1$ סימנים שונים. נבחר תחילה את מיקומם של n_k סימני k ב- $\binom{n_1+n_2+...+n_k}{n_k}$ דרכים. כעת נותרו לנו $n_1+n_2+...+n_{k-1}$ מקומות פנויים שבהם עלינו למקם את $k-1$ סוגי הסימנים הנותרים. לפי הנחת האינדוקציה אפשר לעשות זאת ב- $\frac{(n_1+n_2+...+n_{k-1})!}{n_1!n_2!\cdots n_{k-1}!}$ דרכים שונות. לכן, לפי עקרון המכפלה מספר המילים האפשריות הוא:

$$\binom{n_1+n_2+\ldots+n_k}{n_k}\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})!}{n_1!n_2!\cdots n_{k-1}!}=$$

$$\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_k!(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})!}\cdot\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})!}{n_1!n_2!\cdots n_{k-1}!}=\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

כנדרש. □

הגדרה 4.7.5: יהיו $n_1,n_2,\ldots,n_k$ מספרים שלמים אי-שליליים שמקיימים $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. המספר $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ נקרא **מקדם מולטינומי** ומסומן על ידי $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.

הערה: למעשה לפי סימון זה היה צריך לסמן את המקדם הבינומי $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ על ידי $\binom{n}{k,n-k}$, אולם נהוג לסמנו על ידי $\binom{n}{k}$ כפי שעשינו עד כה.

המקדמים המולטינומיים מקיימים זהויות הדומות לאלה שמקיימים המקדמים הבינומיים. כך למשל, אפשר להוכיח נוסחה הדומה לנוסחת הבינום של ניוטון.

משפט 4.7.6 (הכללה לנוסחת הבינום של ניוטון): יהיו $x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. אז:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}x^{n_1}x^{n_2}\cdots x^{n_k}$$

כאשר הסכום מחושב על פני כל המספרים השלמים האי-שליליים $n_1,n_2,\ldots,n_k$ שמקיימים $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.

אפשר גם להוכיח נוסחה המכלילה את זהות פסקל. כזכור זהות פסקל למקדמים הבינומיים היא:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

אם נרשום את המקדמים הבינומיים בזהות פסקל כמקדמים מולטינומיים נקבל את הזהות:

$$\binom{n}{k,n-k}=\binom{n-1}{k-1,n-k}+\binom{n-1}{k,n-k-1}.$$

באופן כללי נקבל את המשפט הבא.

משפט 4.7.7 *(הכללה לזהות פסקל)*: יהיו $n_1,n_2,...,n_k$ מספרים שלמים חיוביים שמקיימים $n_1+n_2+...+n_k = n$. אז:

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_k} = \sum_{i=1}^{k}\binom{n-1}{n_1,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_k}.$$

כזכור ראינו שמספר הדרכים לבחור תת-קבוצה של n_i איברים מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ הוא $\binom{n}{n_i}$. בחירה כזאת של n_i איברים היא כמובן חלוקה של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ לשתי קבוצות זרות: קבוצה אחת הכוללת את n_i האיברים שנבחרו והקבוצה השנייה היא המשלים שלה. המשפט הבא מכליל תוצאה זו.

משפט 4.7.8: מספר הדרכים לחלק את הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ ל- k קבוצות זרות $A_1,A_2,...,A_k$ כך ש- $|A_i| = n_i$ עבור $1 \le i \le k$ ומתקיים $n_1+n_2+...+n_k = n$, הוא $\binom{n}{n_1,n_2,...,n_k}$.

תרגילים

1. כמה מילים אפשר לכתוב הכוללות 4 אותיות a, 5 אותיות b ו- 8 אותיות c?
2. הוכיחו את ההרחבה לנוסחת הבינום של ניוטון במשפט 4.7.6.
הדרכה: חפשו הרחבה מתאימה להוכחת נוסחת הבינום הרגילה (משפט 4.3.1).
3. הוכיחו כי $\frac{(k!)!}{k!^{(k-1)!}}$ הוא מספר שלם לכל $k \ge 1$ טבעי.
4. הוכיחו כי $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}\cdot\frac{2}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$ לכל $n > 0$.
5. יהיו n ו- k מספרים טבעיים. הוכיחו ש- $\binom{-n}{k} = (-1)^k\cdot\binom{n+k-1}{k}$.
6. הוכיחו באופן קומבינטורי את משפט 4.7.7.
הדרכה: הרחיבו באופן נאות את ההוכחה של זהות פסקל (משפט 4.3.6).

הערות היסטוריות

סר איזיק ניוטון Sir Isaac Newton *(אנגליה 1643-1727)*. נחשב על ידי רבים לגדול מדעני הטבע בכל הזמנים. בניגוד לרבים מהמדענים הוא לא התבלט בכשרונות מיוחדים בילדותו, ואף לא

בתחילת לימודיו באוניברסיטת קיימברידג'. במהלך לימודיו שם בשנת 1665 נסגרה האוניברסיטה לזמן מה עקב מגיפה. בתקופה זו שהה ניוטון בביתו וכנראה עשה אז כמה מעבודותיו המדעיות העיקריות. בין עבודותיו החשובות – ניסוח חוק הכבידה הכללי. בהקשר זה מוכר הסיפור על התפוח שנפל על ראשו של ניוטון והביא אותו להרהר בחוק המשיכה. ניוטון גילה את העובדה שאור לבן מתפצל לאלומות צבעוניות בעברו דרך מנסרה. הוא פיתח את יסודות החשבון האינפיניטסימלי ובעזרתו הצליח לקדם את עבודתו בפיזיקה. מאוחר יותר התגלע סכסוך בינו לבין לייבניץ שפיתח בנפרד ובאופן עצמאי אף הוא את יסודות החשבון הדיפרנציאלי. ניוטון מונה לפרופסור בקיימברידג' והוסיף לתרום תרומות מכריעות לפיזיקה ולמתמטיקה. בשנותיו האחרונות עסק ניוטון בעיקר בפעילות ציבורית ועמד בראש החברה המדעית המלכותית בבריטניה.

ליאונרדו פיסנו פיבונאצ'י Leonardo Pisano Fibonacci (איטליה 1170-1250). נולד באיטליה אולם התחנך בצפון אפריקה שם שהה אביו כדיפלומט. בסביבות 1200 חזר פיבונאצ'י לאיטליה וב- 1202 פרסם את ספרו המפורסם Liber Abaci שכלל את המסקנות שצבר במהלך נסיעותיו בתחומי תורת המספרים והאלגברה. הספר מציג את השיטה העשרונית הערבית-הינדית. הספר דן גם במשוואות ליניאריות, ובין הבעיות הרבות המתוארות בו מופיעה גם הבעיה של קצב ההתרבות של הארנבות ומספרי פיבונאצ'י (ראו סעיף 4.4). כן מופיעות בספר בעיות העוסקות במספרים מושלמים, משפט השאריות הסיני, סדרות חשבוניות וגיאומטריות.
פיבונאצ'י פרסם ספרים נוספים שבהם מופיעות תוצאות בתורת המספרים, אולם תוצאותיו בתחום זה נשכחו ברבות השנים.

בלייז פסקל Blaise Pascal (צרפת 1623-1662). התגלה כילד פלא במתמטיקה לאחר שאביו אסר עליו ללמוד מתמטיקה לפני גיל 15. כך נאלץ פסקל להוכיח בעצמו בגיל 12 תוצאות רבות מתחום הגיאומטריה. בגיל 16 הוא כבר פרסם את מאמרו הראשון בגיאומטריה. פסקל המציא למעשה את המחשב הספרתי הראשון כדי לעזור לאביו בעבודתו כגובה מסים.
פסקל לא היה הראשון שהגדיר את משולש פסקל. אולם עבודתו בנושא הייתה חשובה ומקיפה, ותוצאותיו לגבי המקדמים הבינומיים הביאו את ניוטון לגלות את משפט הבינום הכללי גם לחזקות שבריות ושליליות.
יחד עם פרמה הניח פסקל את היסודות לתורת ההסתברות. הוא אף פרסם מאמרים בנושאי דת ופילוסופיה וטען שאמונה באלוהים היא הגיונית כי: "אם אלוהים אינו קיים, לא נפסיד דבר אם נאמין בו, ואילו אם הוא קיים, הרי נפסיד הכול אם לא נאמין בו".
פסקל מת בגיל 39 מסרטן לאחר שסבל במהלך כל חייו מבריאות לקויה.

אז'ן שרל קטלן Eugène Charles Catalan (בלגיה 1814-1894). רוב מחקריו עסקו בתורת המספרים. הקריירה שלו נפגעה מפעילותו הפוליטית השמאלנית הנמרצת. קטלן הגדיר את המספרים הקרויים על שמו במסגרת ניסיונו למנות את מספר השילושים של מצולעים קמורים (ראו תרגיל 11 בסעיף 4.4).