# 3. אינדוקציה ורקורסיה

בתקופתם של הפילוסופים היוונים היו שגורות שתי שיטות דיון מרכזיות - השיטה האינדוקטיבית והשיטה הדדוקטיבית. אינדוקציה היא שיטה שבה מסיקים מסקנה לגבי הכלל על ידי בדיקת מספר קטן יחסית של מקרים פרטיים. דדוקציה לעומתה היא שיטה שבה גוזרים לגבי הפרט מתוך ידיעה של הכלל. בעוד שמסקנות שנגזרות בדרך דדוקטיבית הן תמיד נכונות, יש להיזהר מהסקה אינדוקטיבית שעלולה להביא למסקנות שגויות. למשל, אם נבחן את מזג האוויר בארץ במהלך הקיץ, נוכל להסיק אינדוקטיבית שבארץ תמיד חם - מסקנה מוטעית לכל הדעות. אף על פי כן, אינדוקציה היא דרך מקובלת לפיתוח השערות מדעיות בתחומים מדעיים רבים.

לעומת שיטת הדיון האינדוקטיבית שהייתה מוכרת כאמור כבר בימי הפילוסופים היוונים, אנו נדון בעקרון **האינדוקציה המתמטית**. עקרון זה מאפשר לנו להוכיח טענות על המספרים הטבעיים על ידי תקפותה של הטענה הרצויה למספרים קטנים יותר. שיטה זו מוכרת ודאי לקוראים עוד מהלימודים בתיכון. אנו נראה איך נובעת השיטה החזקה הזו מהאקסיומה הפשוטה והאינטואיטיבית הבאה על המספרים הטבעיים: "בכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש איבר קטן ביותר". נוסיף ונראה שלאינדוקציה מתמטית יש הרחבות מועילות ביותר המאפשרות להוכיח טענות גם על מבנים מתמטים מורכבים יותר מאשר המספרים הטבעיים. למעשה, בכל הקשר שבו האקסיומה הנ"ל או דומתה תקפה, אפשר להשתמש באינדוקציה מתמטית. נדגיש שבניגוד לדרך ההסקה האינדוקטיבית של היוונים, שימוש נכון בעיקרון האינדוקציה המתמטית ישיג תמיד הוכחות מתמטיות נכונות.

רקורסיה היא שיטה שבה מחשבים את ערכה של פונקציה מתמטית במספר מסוים על פי ערכי הפונקציה במספרים קטנים יותר. שיטה זו מהווה בסיס לשיטה מרכזית לפתרון בעיות במדעי המחשב. מדובר בגישה שבה פותרים בעיה גדולה על ידי פירוקה לבעיות קטנות ופתרונן, כאשר כל בעיה קטנה דומה במבנה שלה לבעיה המקורית אבל "פשוטה" יותר לפתרון. כל אחת מהבעיות הקטנות יותר תיפתר גם היא בדרך רקורסיבית, עד אשר מגיעים לבעיה פשוטה דיה שניתנת לפתרון ישיר. בסיום משלבים את כל הפתרונות החלקיים לקבלת פתרון לבעיה כולה. השיטה הזאת לפיתוח אלגוריתמים נקראת לפעמים גם "שיטת הפרד ומשול".

## 3.1. עקרון האינדוקציה המתמטית

הנושאים שיוצגו: *עקרון האינדוקציה המתמטית, בסיס האינדוקציה, הנחת האינדוקציה, עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה, פירוק לגורמים ראשוניים.*

עקרון האינדוקציה המתמטית הוא כלי שימושי להוכחת טענות מתמטיות הקשורות במספרים הטבעיים. עקרון זה מבוסס על האקסיומה הפשוטה הבאה.

**האקסיומה של האינדוקציה המתמטית:** תהי $A$ קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים. אז יש ב- $A$ איבר מינימלי, כלומר, קיים $a\in A$ כך שלכל $b\in A$ מתקיים $b \geq a$.

זו אקסיומה אינטואיטיבית מאוד, ולהלן נראה איך נגזרת ממנה שיטה מתמטית חזקה לפתרון בעיות רבות ולהוכחה של משפטים. נפתח בטענה פשוטה שתדגים כיצד אפשר בעזרת האקסיומה להוכיח משפטים מתמטיים. אפשר אמנם להוכיח טענה זו גם בדרכים אחרות (וייתכן שאף פשוטות יותר), אולם מטרתנו העיקרית היא להדגים בעזרת הטענה את השימוש בעקרון האינדוקציה המתמטית.

**טענה 3.1.1:** לכל $n \in \mathbb{N}$, המספר $n(n+3)$ הוא מספר זוגי.

**הוכחה:** נשים לב תחילה שהטענה נכונה ל- $n = 0$ כי $0 = 0(0+3)$ הוא מספר זוגי כנדרש.
נניח בשלילה שיש $n$ י-ם טבעיים שבשבילם הטענה אינה נכונה. נתבונן בקבוצה $A$ של כל המספרים הטבעיים שאינם מקיימים את הטענה, כלומר $A = \{k \mid k\in \mathbb{N},\ k(k+3) \text{ אי-זוגי}\}$. לפי הנחת השלילה הקבוצה $A$ איננה ריקה. לכן, לפי אקסיומת האינדוקציה המתמטית קיים ב- $A$ איבר מינימלי, נניח שזהו $n$. מכיוון שהאיבר $n$ הוא המינימלי בקבוצה $A$, אז $(n-1)\notin A$. בנוסף, ראינו כבר שהמספר **0** איננו שייך לקבוצה $A$. לכן $n > 0$ ומכאן $n-1 \geq 0$. כלומר $n-1$ הוא מספר טבעי שמקיים את הטענה. נסכם את הידוע לנו עד כה:

- $n\in A$, כלומר המכפלה $n(n+3)$ היא מספר אי-זוגי.
- $n-1\notin A$, כלומר המכפלה $(n-1)(n-1+3) = (n-1)(n+2)$ היא מספר זוגי.

נביט בהפרש של שתי המכפלות ונקבל: $n(n+3) - (n-1)(n+2) = 2n + 2 = 2(n+1)$.
זהו מספר זוגי. אולם ההפרש בין מספר אי-זוגי למספר זוגי הוא אי-זוגי, וזו סתירה. קיבלנו לכן סתירה מתוך ההנחה ש- $A \neq \varnothing$. לכן $A = \varnothing$, כלומר הטענה שלנו נכונה. □

נתבונן לרגע בהוכחה שסיימנו זה עתה. אף כי הוכחנו טענה מסוימת ואפילו לא טענה קשה במיוחד, פיתחנו זה עתה שיטה רבת חשיבות ורבת עוצמה, שבעזרתה נוכל לפתור בעיות קשות וחשובות בהרבה. הבה נסכם את עיקרי השיטה כפי שבאו לביטוי בהוכחה הנ"ל.

עמדה לפנינו תכונה $P(n)$ של המספרים הטבעיים (בדוגמה שלנו $n(n+3)$ מספר זוגי). רצינו להוכיח שהתכונה $P(n)$ מתקיימת לכל מספר $n$ טבעי. שיטת ההוכחה שבה נקטנו, הנגזרת ישירות מאקסיומת האינדוקציה המתמטית, פועלת כך:

1. מוודאים כי $P(0)$ תקף - כלומר התכונה מתקיימת ל- $n = 0$.
2. מוכיחים שלא ייתכן כי $P(n-1)$ מתקיים אולם $P(n)$ לא מתקיים, כאשר $n > 0$.

במילים אחרות, מוכיחים שאם $n-1$ מקיים את התכונה $P$, אז גם $n$ מקיים את התכונה $P$.

הגענו אם כן לניסוח המדויק של עקרון האינדוקציה המתמטית ככלי לפתרון בעיות.

**משפט 3.1.2 (עקרון האינדוקציה המתמטית):** תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \in \mathbb{N}$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה:** הטענה $P(0)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה:** לכל $n > 0$, נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת את נכונות הטענה $P(n)$.

אז $P(n)$ תקפה לכל מספר טבעי $n$.

**הערה:** להנחה שהטענה $P(n-1)$ נכונה קוראים **הנחת האינדוקציה**.

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש מספרים טבעיים $n$ שבשבילם הטענה $P(n)$ אינה מתקיימת. דהיינו, הקבוצה $A = \{k \mid k \in \mathbb{N}$ הטענה $P(k)$ אינה תקפה$\}$ איננה ריקה. לפי אקסיומת האינדוקציה המתמטית יש בקבוצה $A$ איבר מינימלי $n \in A$. לפי הנחה 1 של המשפט $n > 0$, שהרי הטענה $P(0)$ כן מתקיימת (כלומר, $0 \notin A$). לכן גם $n-1 \geq 0$ מספר טבעי. אולם $n$ הוא האיבר המינימלי ב- $A$ ולכן $n-1 \notin A$. קיבלנו אם כן שהטענה $P(n-1)$ תקפה ואילו $P(n)$ איננה תקפה. אולם זו סתירה להנחה 2 של המשפט. □

מכאן, כדי להוכיח טענה כלשהי $P(n)$ באינדוקציה על $n$, נראה שמתקיימים שני התנאים שמציין עקרון האינדוקציה המתמטית, ואז נוכל להסיק שהטענה $P(n)$ נכונה לכל המספרים הטבעיים.

נראה כעת מספר דוגמאות לטענות שאותן אפשר להוכיח בקלות יחסית בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית.

**טענה 3.1.3:** $0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ לכל מספר טבעי $n$.

**הוכחה:** ההוכחה תהיה באינדוקציה על $n$.

בסיס האינדוקציה: $n = 0$, ואכן $0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ל- $n-1 \geq 0$, כלומר

$$0+1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

נוכיח שהטענה נכונה גם ל- $n$, ואכן:

$$[0+1+2+3+\ldots+(n-1)]+n = \frac{(n-1)n}{2}+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

לכן על פי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n \geq 0$. □

שימו לב שבעזרת עקרון האינדוקציה רק הוכחנו שהשוויון שהוצג לנו אכן נכון. העיקרון אינו מאפשר **לחשב** את הסכום $1+2+\ldots+n$. לשם כך דרושות שיטות אחרות. אפשר למשל לחשב סכום זה בעזרת הנוסחה לחישוב טור חשבוני או בדרך הבאה. על פי הפולקלור המתמטי, גילה המתמטיקאי הדגול קרל פרידריך גאוס את השיטה הזו בהיותו בן שבע (אף כי השיטה הייתה ידועה עוד שנים רבות קודם לכן). ניגש לחישוב הסכום.

נסמן את הסכום ב- $S_n = 1+2+\ldots+n$. לכן, גם $S_n = n+(n-1)+\ldots+1$. נחבר את שני השוויונות האחרונים ונקבל:

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2+\ldots+(n-1)+n \\ + \quad S_n &= n+(n-1)+\ldots+2+1 \\ \hline 2S_n &= (1+n)+(2+n-1)+\ldots+(n+1) \\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

ומכאן $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

עקרון האינדוקציה המתמטית מאפשר להוכיח טענות מתחומים שונים ומגוונים. המשפט הבא הוא דוגמה לבעיית מניה שאותה אפשר להוכיח בעזרת עקרון זה.

**משפט 3.1.4:** תהי $A$ קבוצה סופית מעוצמה $|A| = n$. אז מספר התת-קבוצות של $A$ הוא $|P(A)| = 2^n$.

**הוכחה:** נוכיח את המשפט באינדוקציה על $n$.

בסיס האינדוקציה: $n = 0$. במקרה זה הקבוצה $A$ ריקה, ולכן $P(A) = \{\varnothing\}$. ואכן $|P(A)| = 1 = 2^0$.

שלב האינדוקציה: נניח שהמשפט נכון לכל קבוצה בת $n-1 \geq 0$ איברים, ונוכיח את נכונותו לקבוצות עם $n$ איברים. תהי $A$ קבוצה כלשהי בת $n$ איברים, ונניח ש- $A =\{1,2,...,n-1,n\}$. נבחן שני סוגים של תת-קבוצות של $A$:

1. תת-קבוצות שלא כוללות את $n$ כאיבר: נשים לב שתת-קבוצה של $\{1,2,...,n-1,n\}$ שאינה כוללת את האיבר $n$, היא בפשטות תת-קבוצה של $\{1,2,...,n-1\}$. מספרן של תת-קבוצות אלה הוא $2^{n-1}$ על פי הנחת האינדוקציה.
2. תת-קבוצות שכוללות את $n$ כאיבר: אנו נטען שגם מספרן של תת-קבוצות אלה הוא $2^{n-1}$, מפני שיש פונקציה חח״ע ועל בין תת-קבוצות אלה לבין תת-קבוצות של $\{1,2,...,n-1\}$ (ולכן מספרן שווה כפי שראינו בסעיף 1.5, משפט 1.5.7). ההתאמה תיעשה על ידי השמטת האיבר $n$ מן הקבוצה האמורה. לדוגמה אם $n = 3$, ההתאמה בין תת-קבוצות הכוללות את 3 לבין תת-קבוצות של $\{1, 2\}$ מוצגת בטבלה שלהלן. בדקו שזו אכן התאמה חח״ע ועל.

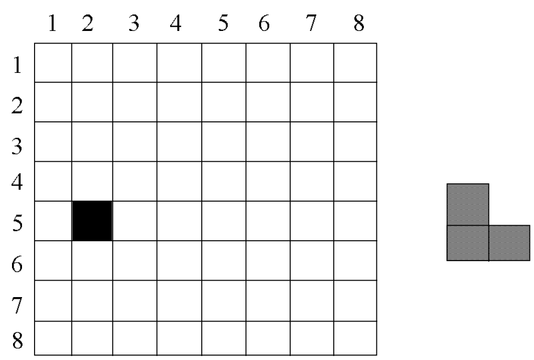
| תת-קבוצות של $\{1, 2\}$ | $\varnothing$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{1, 2\}$ |
|---|---|---|---|---|
| תת-קבוצות של $\{1, 2, 3\}$ שכוללות את 3 | $\{3\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2, 3\}$ | $\{1, 2, 3\}$ |

בסה"כ קיבלנו $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ תת-קבוצות של A, כנדרש. לכן על פי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n \geq 0$. □

הוכחות באינדוקציה עשויות לפעמים ללבוש צורה מפתיעה כמו בדוגמה שלהלן.

## בעיית הריצוף

נתון לוח משבצות בגודל $m \times m$. משבצת אחת בלוח צבועה בשחור. בנוסף יש מרצפות מיוחדות שנראות כמו לוח בגודל $2 \times 2$ שפינתו האחת חסרה כבתרשים 3.1.1. עלינו לכסות את הלוח כולו (פרט למשבצת השחורה) בעזרת המרצפות המיוחדות, כאשר אפשר לשים את המרצפות המיוחדות בכל כיוון רצוי. כיסוי כזה נקרא ריצוף של הלוח.




**תרשים 3.1.1: לוח של משבצות כאשר $m = 8$, ולצדו המרצפת המיוחדת.**

**משפט 3.1.5:** לבעיית הריצוף של לוח בגודל $m \times m$ יש פתרון לכל m שהוא חזקה של 2.

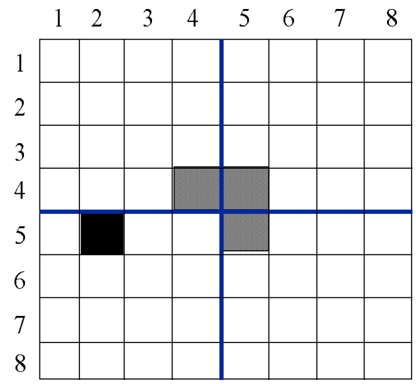
**הוכחה:** מכיוון ש- m הוא חזקה של 2, אפשר להניח ש- $m = 2^n$ עבור n כלשהו.

ההוכחה תהיה באינדוקציה על n כאשר $m = 2^n$.

בסיס האינדוקציה: $n = 0$. במקרה זה $m = 1$, כלומר מדובר בלוח בגודל $1 \times 1$ או במילים אחרות במשבצת אחת. לכן בהכרח המשבצת הזו צבועה בשחור, ומכאן הלוח כולו כבר מכוסה.

שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $n-1 \geq 0$ ונוכיח ל- n.

נתבונן בלוח בגודל $2^n \times 2^n$ ונחלק אותו במרכזו לארבעה לוחות שווים, כל אחד בגודל $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. המשבצת השחורה נמצאת באחד מארבעת הלוחות האלה. ניקח מרצפת מיוחדת ונשים אותה במרכז הלוח, כאשר פינתה החסרה נמצאת בלוח שמכיל את המשבצת השחורה (ראו תרשים 3.1.2). כעת קיבלנו ארבעה לוחות כל אחד בגודל $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ ובכל אחד חסרה משבצת אחת. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לרצף כל אחד מהם, ועל כן ניתן לרצף גם את הלוח הגדול. □




**תרשים 3.1.2: חלוקת הלוח לארבעה לוחות שווים, והנחת המרצפת הראשונה.**

שימו לב שההוכחה הזו מספקת לנו גם דרך מעשית או אלגוריתם לריצוף הלוח. האלגוריתם הפשוט שניתן לפתח מתוך ההוכחה הוא למעשה פתרון רקורסיבי לבעיית הריצוף.

**אתגר:** לאלו ערכים של m (לאו דווקא חזקות של 2) יש לבעיית הריצוף פתרון?

## הרחבות של עקרון האינדוקציה המתמטית

נזכור שהכלי שפיתחנו ונקרא בשם "עקרון האינדוקציה המתמטית" נובע כמסקנה ישירה מהאקסיומה של האינדוקציה. נשאלת השאלה האם יש מבנים מתמטיים נוספים שיש להם תכונה דומה לנאמר באקסיומה של האינדוקציה. על מבנים כאלה נוכל להפעיל כלי דומה לעקרון האינדוקציה המתמטית. למשל, ישנן בעיות רבות שבהן הטענה שמנסים להוכיח אינה נכונה לכל מספר טבעי n, אלא נכונה רק למספרים הטבעיים הגדולים או שווים למספר טבעי $a > 0$. גם במקרים כאלה אפשר פעמים רבות להשתמש בעקרון האינדוקציה המתמטית.

**משפט 3.1.6:** תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \in \mathbb{N}$. אם קיים $a \in \mathbb{N}$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה:** הטענה $P(a)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה:** לכל $n > a$, נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת את נכונות הטענה $P(n)$.

אז הטענה $P(n)$ תקפה לכל מספר טבעי $n \geq a$.

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש מספרים טבעיים $n \geq a$ שבשבילם הטענה $P(n)$ אינה מתקיימת. דהיינו, הקבוצה $A = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq a$ הטענה $P(k)$ אינה תקפה$\}$ איננה ריקה. לפי אקסיומת האינדוקציה המתמטית יש בקבוצה A איבר מינימלי $n \in A$. לפי הנחה 1 של המשפט $n > a$, שהרי הטענה $P(a)$ דווקא מתקיימת. לכן $n-1 \geq a$. אולם n הוא האיבר המינימלי הגדול מ- a ששייך ל-A, ולכן $(n-1) \notin A$. קיבלנו אם כן שהטענה $P(n-1)$ תקפה ואילו $P(n)$ איננה תקפה. אולם זו סתירה להנחה 2 של המשפט. □

במקרים אלה יש להוכיח כמובן בבסיס האינדוקציה את נכונות הטענה למספר $a$. נראה למשל דוגמה שבה הטענה איננה נכונה למספרים הטבעיים הראשונים, אלא מתקיימת רק החל מ- $n = 5$.

**משפט 3.1.7:** $n^2 < 2^n$ לכל מספר טבעי $n \geq 5$.

**הוכחה:** שוב ההוכחה תהיה באינדוקציה על $n$.

בסיס האינדוקציה: $n = 5$. ואמנם $5^2 < 2^5$.

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ל- $n-1 \geq 5$, כלומר $(n-1)^2 < 2^{n-1}$.

נוכיח שהטענה נכונה גם ל- $n$. נכפיל את הנחת האינדוקציה ב- 2 ונקבל: $2(n-1)^2 < 2^n$.

כעת נראה ש- $n^2 \leq 2(n-1)^2$ לכל $n \geq 5$, ובשילוב עם האי-שוויון לעיל נקבל כי:

$$n^2 \leq 2(n-1)^2 < 2^n$$

כנדרש. נראה, אם כן, כי $n^2 \leq 2(n-1)^2$ לכל $n \geq 5$. לאחר העברת אגפים מתברר שעלינו להוכיח כי $0 \leq n^2-4n+2$ לכל $n \geq 5$. אבל הביטוי $n^2-4n+2$ חיובי לכל מספר טבעי $n$ המקיים $n \geq 2+\sqrt{2} = 3.414...$, ובפרט ל- $n \geq 5$ (פתרו את המשוואה הריבועית המתאימה כדי לוודא זאת). □

**הערות:**

1. הוכחנו ש- $n^2 < 2^n$ לכל מספר טבעי $n \geq 5$. למעשה ככל שהמספר $n$ גדל, הפער בין $n^2$ ל- $2^n$ הולך וגדל. בפרק 7 נפתח כלים מדויקים המאפשרים לערוך השוואות בין קצבי הגידול של פונקציות שונות.
2. לקוראים עם רקע קודם בחשבון דיפרנציאלי: ניתן לחשוב על ההוכחה האינדוקטיבית שראינו זה עתה כעל גרסה בדידה לפעולות עם נגזרות. אנו הוכחנו באינדוקציה טענה מהסוג $f(n) \leq g(n)$ לכל מספר טבעי $n$. נניח שברצוננו להוכיח כי $f(x) \leq g(x)$ לכל מספר ממשי $x \geq 0$. להלן שיטה אפשרית להוכחת אי-שוויונות כאלה שלעתים עובדת: מוודאים כי $f(0) \leq g(0)$, וכי $f'(x) \leq g'(x)$ לכל $x \geq 0$. למשל נניח שברצוננו להוכיח כי $f(x) = 1 + x \leq e^x = g(x)$ לכל $x \geq 0$. נבדוק כי מתקיים $f(0) = 1 \leq e^0 = g(0)$. כמו-כן $f'(x) = 1 \leq e^x = g'(x)$ לכל $x \geq 0$. ולכן $f(x) \leq g(x)$ לכל מספר ממשי $x \geq 0$.

**משפט 3.1.8 (אי-שוויון ברנולי):** יהי $x > 0$ מספר ממשי. אז: $(1 + x)^n > 1 + nx$ לכל $n \geq 2$.

**הוכחה:** ההוכחה היא באינדוקציה על $n$.

בסיס האינדוקציה: $n = 2$. ואמנם $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ כי $x > 0$.

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ל- $n-1 \geq 2$, כלומר $(1 + x)^{n-1} > 1 + (n-1)x$. נוכיח שהטענה נכונה גם ל- $n$. ואכן,

$$(1 + x)^n = (1 + x)(1 + x)^{n-1} > (1 + x)(1 + (n-1)x) = 1 + nx + (n-1)x^2 > 1 + nx.$$

לכן, על פי עקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 2$. □

שימו לב שהאי-שוויון שהוכחנו זה עתה אינו נכון ל- $n = 1$. אולם האי-שוויון החלש $(1 + x)^n \geq 1+ nx$ מתקיים לכל $n \geq 1$ (כי שלב האינדוקציה שראינו זה עתה יהיה נכון לכל $n \geq 1$ במקרה זה).

נתבונן שוב במימוש של שלב האינדוקציה כפי שראינו אותו עד כה. על מנת להראות שהתכונה P תקפה לכל המספרים הטבעיים, עלינו להוכיח כי נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת גם את נכונות הטענה $P(n)$. למעשה, די אם נוכל להסיק את המסקנה הזו מתוך הנחה חזקה בהרבה (כמובן קל יותר להוכיח טענה רצויה בהסתמך על הנחות חזקות יותר). בהוכחה של עקרון האינדוקציה המתמטית הגדרנו קבוצה:

$A = \{k \mid k \in \mathbb{N}$, הטענה $P(k)$ אינה תקפה$\}$,

והוכחנו כי $A = \varnothing$. כדי להוכיח זאת הנחנו בשלילה כי הקבוצה $A \neq \varnothing$, והסקנו מאקסיומת האינדוקציה כי יש איבר מינימלי $n \in A$. פירוש הדבר שהמספרים $0, 1, 2, ..., n-1$ כולם אינם בקבוצה A. לכן הטענות $P(0), P(1), P(2), ..., P(n-1)$ כולן תקפות. בהוכחות שראינו עד כה ניצלנו רק את העובדה ש- $P(n-1)$ תקפה, אבל כפי שראינו כרגע אין שום סיבה להימנע משימוש בתקפותה של הטענה P גם למספרים שלפני $n-1$. אבחנה זו מובילה אותנו לניסוח הכללי של עקרון האינדוקציה המתמטית.

**משפט 3.1.9 (עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה):** תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \in \mathbb{N}$. אם קיים מספר $a \in \mathbb{N}$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה:** הטענה $P(a)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה:** לכל $n > a$, נכונות הטענה $P(k)$ לכל $a \leq k \leq n-1$ גוררת את נכונות הטענה $P(n)$.

אז הטענה $P(n)$ נכונה לכל $n \geq a$.

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש מספרים טבעיים $n \geq a$ שבשבילם הטענה $P(n)$ אינה מתקיימת. דהיינו, הקבוצה $A = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq a$, הטענה $P(k)$ אינה תקפה$\}$ אינה ריקה. לפי אקסיומת האינדוקציה המתמטית יש בקבוצה A איבר מינימלי $n \in A$. לפי הנחה 1 של המשפט $n > a$, שהרי הטענה $P(a)$ מתקיימת (כלומר, $a \notin A$). לכן גם המספרים $a, a+1, a+2, ..., n-1$ הם מספרים טבעיים, והטענות $P(a), P(a+1), P(a+2), ..., P(n-1)$ כולן תקפות, שכן n הוא האיבר המינימלי ב- A. אולם זו סתירה להנחה 2 של המשפט. □

**הערה:** במקרים מסוימים יהיה צורך להוכיח בבסיס האינדוקציה את נכונות הטענה עבור יותר מערך מסוים אחד, וזאת מכיוון ששלב האינדוקציה יהיה תלוי בנכונות הטענה בכמה ערכים קודמים. אנו נראה דוגמאות לכך בהמשך בסעיף 3.4 העוסק בנוסחאות נסיגה (ראו גם תרגיל 6 בסעיף זה).

נראה לדוגמה כיצד אפשר בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה להוכיח טענות מעניינות מתחום תורת המספרים.

**הגדרה 3.1.10:** מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, נקרא **ראשוני** אם הוא מתחלק רק ב- 1 ובעצמו.

**משפט 3.1.11:** כל מספר טבעי $n > 1$ ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים. מכפלה כזאת נקראת **פירוק של n לגורמים ראשוניים**.

**הערה:** מכפלה הכוללת גורם אחד ויחיד x אף היא נחשבת למכפלה (ראו דיון מפורט במכפלות בסעיף 3.3). לכן, המשפט ודאי תקף לכל מספר ראשוני n.

**הוכחה:** נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n = 2$. מכיוון ש- 2 הוא מספר ראשוני הטענה ברורה לאור ההערה האחרונה.
שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל המספרים $2,3,4,...,n-1$ ונוכיח שהיא נכונה ל- $n$.
אם המספר $n$ ראשוני - הטענה כאמור תקפה וסיימנו.
אחרת, קיימים שני מספרים $s,t \in \mathbb{N}$ כך ש: $n = s \cdot t$ ו- $1 < s,t < n$. אולם אז לפי הנחת האינדוקציה לכל אחד מהמספרים $s,t$ יש פירוק לגורמים ראשוניים, ולכן למספר $n$ יש פירוק לגורמים ראשוניים, דהיינו מכפלת כל הגורמים האלה. □

נדגיש שוב שבהוכחה זו לא הסתפקנו בהנחת האינדוקציה ל- $n-1$, אלא השתמשנו בהנחת האינדוקציה לשני מספרים $s,t$ הקטנים מ- $n$.

הוכחת המשפט הבא נחשבת לאחד ההישגים המרשימים ביותר של המתמטיקה היוונית הקדומה.

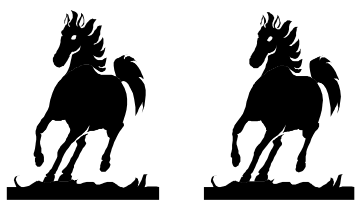
**משפט 3.1.12:** יש אינסוף מספרים ראשוניים.
**הוכחה:** נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיימים לפחות $n$ מספרים ראשוניים שונים זה מזה.
בסיס האינדוקציה: $n = 1$. אכן יש לפחות מספר ראשוני אחד, למשל 2.
שלב האינדוקציה: נניח שיש לפחות $n-1$ מספרים ראשוניים שונים זה מזה $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$, ונראה שיש מספר ראשוני נוסף השונה מהם, כלומר יש לפחות $n$ מספרים ראשוניים שונים זה מזה. נתבונן במספר $x = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-1}$.
אם $x$ ראשוני - סיימנו, כי הוא שונה מ- $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ (הוא כמובן גדול מכל אחד מהם).
אחרת, לפי המשפט הקודם יש ל- $x$ פירוק לגורמים ראשוניים. אולם המספרים $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ אינם מחלקים את $x$ (הרי כאשר מחלקים את $x$ ב- $p_i$ נשארת שארית 1). לכן הגורמים הראשוניים של $x$ אינם נמנים עם המספרים $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$. משמע שחייב להיות מספר ראשוני נוסף $p_n$ שמחלק את $x$.
בכל מקרה, הוכחנו את קיומם של לפחות $n$ מספרים ראשוניים - $p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n$. □

בעזרת האינדוקציה המתמטית המלאה נוכל לחזור ולהשלים את ההוכחה של חלקו הראשון של משפט 1.6.24.

**משפט 3.1.13:** תהי $(A, \leq)$ קס"ח סופית שאורכה $\ell = \ell(A)$ (כזכור, האורך של קס"ח הוא העוצמה המירבית של שרשרת ב- $A$). אז אפשר לחלק את $A$ ל- $\ell(A)$ אנטי-שרשראות.
**הוכחה:** נוכיח את המשפט באינדוקציה על $\ell$.
בסיס האינדוקציה: $\ell = 1$. במקרה זה היחס $\leq$ הוא ריק, כי אם $x \leq y$ כאשר $x \neq y$ שני איברים ב- $A$, אז הזוג $x,y$ מהווה שרשרת בת שני איברים, בסתירה לכך ש- $\ell = 1$. לכן במקרה זה ניתן להסתפק באנטי-שרשרת אחת הכוללת את כל איברי $A$.
שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לקבוצות סדורות חלקית שאורכן לכל היותר $\ell - 1$, ונוכיח שהיא נכונה לקבוצות סדורות חלקית שאורכן $\ell$.
תהיה $M \subseteq A$ קבוצת האיברים המינימליים ב- $A$. לכן הקבוצה $M$ היא אנטי-שרשרת (ראו תרגיל 10 בסעיף 1.6). כמו-כן, נוכיח מיד שהאורך של הקס"ח $(A \setminus M, \leq)$ הוא לכל היותר $\ell - 1$,

ולכן לפי הנחת האינדוקציה אפשר לחלק את A\M ל- $\ell-1$ אנטי-שרשראות. ביחד עם M נקבל חלוקה של A ל- $\ell$ אנטי-שרשראות כנדרש.
נוכיח כעת כדרוש שהאורך של הקס"ח A\M הוא לכל היותר $\ell-1$. תהיה $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k$ שרשרת ארוכה ביותר ב- A\M. מכיוון ש- $y_1 \notin M$, אז $y_1$ אינו איבר מינימלי ב- A. לכן יש איבר $x \in A$ השונה מ- $y_1$ ומקיים $x \le y_1$. נוסיף את x לשרשרת ונקבל שרשרת $x \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k$ מאורך k+1 ב- A. אולם האורך של כל שרשרת ב- A הוא לכל היותר $\ell$, ולכן $k+1 \le \ell$. מכאן $k \le \ell-1$ כפי שטענו. □

לסיום סעיף זה, נדגיש שהוכחה באינדוקציה דורשת זהירות רבה. יש להקפיד ולהוכיח גם את בסיס האינדוקציה, וכאשר מוכיחים את שלב האינדוקציה להוכיח **לכל** $n \ge a$, כאשר a הוא המספר שלגביו מוכיחים את בסיס האינדוקציה. נראה כעת דוגמה לכך שכאשר מדלגים על אחד השלבים עלולים להגיע לתוצאות שגויות.



**"טענה:"** לכל n סוסים אותו הצבע.
**"הוכחה:"** נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה: $n = 1$, ברור שלסוס אחד יש צבע אחד.
שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ל-$n-1 \ge 1$. כלומר, לכל $n-1$ סוסים יש אותו צבע. נוכיח את הטענה ל- n סוסים. תהי $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ קבוצה כלשהי של n סוסים. נגדיר שתי קבוצות חדשות, כל אחת בת $n-1$ סוסים:

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \quad B = \{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

לפי הנחת האינדוקציה לכל הסוסים ב-A אותו הצבע ולכל הסוסים ב-B אותו הצבע (אם כי איננו טוענים מראש שצבע הסוסים ב-A זהה לצבע הסוסים ב-B). אולם $x_2 \in A \cap B$ ולכן לכל הסוסים ב-A וב-B אותו צבע והוא צבעו של $x_2$. אנו מסיקים כי לכל הסוסים בקבוצה X אותו הצבע.
לכן על פי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל קבוצה של $n \ge 1$ סוסים. □

כמסקנה אפשר להסיק שלכל הסוסים בעולם יש צבע אחד! היכן הטעות בהוכחה? הבעיה היא שלא הוכחנו את שלב האינדוקציה לכל $n \ge 1$, משום שאם $X = \{x_1, x_2\}$ אז $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$ ולכן $A \cap B = \varnothing$ (ובפרט $x_2 \notin A \cap B$ בניגוד למה שאמרנו). כלומר, הכישלון הוא במעבר מ- $n = 1$ ל- $n = 2$. דהיינו, ההנחה שהטענה נכונה עבור $n = 1$, איננה גוררת נכונות גם עבור $n = 2$.

## תרגילים

1. לצורך התרגילים הבאים תזדקקו לטענה שבסעיף א', שאותה תתבקשו להוכיח (אין צורך בהוכחה באינדוקציה).
   א. הוכיחו שלכל שלושה מספרים $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \ne 0$, אם $b \equiv 0 \pmod a$, $c \equiv 0 \pmod a$, אז גם $(bx + cy) \equiv 0 \pmod a$ לכל שני מספרים $x, y \in \mathbb{Z}$.

ב. הסיקו ממשפט 3.1.5 שהמספר $4^n-1=$ מתחלק ב- 3 ללא שארית לכל $n\in\mathbb{N}$.
ג. הוכיחו זאת גם באינדוקציה.
ד. הוכיחו באינדוקציה ש- $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ מתחלק ב- 9 ללא שארית לכל $n\in\mathbb{N}$.

2. תהיינה $A_1,A_2,\dots,A_n$ קבוצות כלשהן. הוכיחו באינדוקציה את כללי דה-מורגן המורחבים:

א. $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

ב. $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

כזכור $\overline{A_i}$ הוא המשלים של הקבוצה $A_i$, ואילו $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}$ הוא המשלים של $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

3. הוכיחו באינדוקציה שהטענות הבאות נכונות לכל $n\geq 1$ טבעי.

א. $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

ב. $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2$.

4. הוכיחו באינדוקציה כי $2n+1<2^n$ לכל $n\geq 3$ טבעי.

5. הוכיחו באינדוקציה את נוסחת הטור הגיאומטרי:

$$a^0+a^1+a^2+\dots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$ לכל מספר ממשי $a\neq 1$.

6. הוכיחו בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה שכל מספר טבעי $n\geq 12$ ניתן לכתוב בצורה $n=3x+7y$ כאשר $x,y$ מספרים טבעיים כלשהם. הכללה של תרגיל זה תינתן בסעיף 3.4 (תרגיל 6).
הדרכה: בדקו בבסיס האינדוקציה את נכונות הטענה ל- $n=12,\ 13,\ 14$.

7. מה הטעות בהוכחה הבאה שמנסה להוכיח באינדוקציה את הטענה:
"$a^n=1$ לכל $n\geq 0$, כאשר $a\neq 1$ מספר ממשי כלשהו."

"ההוכחה" היא:
בסיס האינדוקציה: $n=0$, ואמנם $a^0=1$ לכל $a\neq 1$.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $0,1,2,\dots,n-1$ ונוכיח ל- $n$. ואכן,

$$a^n=\frac{a^{n-1}\cdot a^{n-1}}{a^{n-2}}=\frac{1\cdot 1}{1}=1$$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה המלאה הטענה נכונה לכל $n\geq 0$".

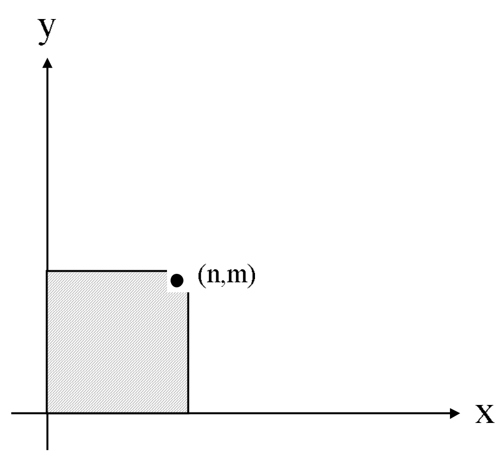
## 3.2. הרחבות של עקרון האינדוקציה

הנושאים שיוצגו: *עקרון האינדוקציה הכפולה, העקרון המלא של האינדוקציה לקבוצות סדורות חלקית המקיימות את תנאי המינימליות.*

לאור ההצלחה שנחלנו בשימוש באקסיומה של האינדוקציה המתמטית, מתבקש לשאול מהו ההקשר הרחב ביותר שבו ניתן לפתח מושג זה. עד כה דנו באינדוקציה ככלי להוכחת תכונות של המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$. כזכור, במקרה זה הסתמכנו על האקסיומה של האינדוקציה המתמטית, הטוענת שבכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים איבר מינימלי. נניח שברצוננו להוכיח תכונות של איברי הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. האם גם כאן יש תופעה דומה לאקסיומת האינדוקציה? עצם הניסוח של אקסיומת האינדוקציה נזקק ליחס הסדר על המספרים הטבעיים. לכן נדון גם כאן בקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עם יחס סדר כלשהו. באופן ספציפי נשאל האם טענה דומה תקפה גם לקבוצה הסדורה חלקית $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{Cart})$, כאשר $(a,b) \leq_{Cart} (c,d)$ אם $a \leq c$ וגם $b \leq d$?
מתברר שכן, והתנאי הנדרש הוא **תנאי המינימליות** שהוגדר בסעיף 1.6. כזכור, נאמר שקבוצה סדורה חלקית $(S, \leq)$ מקיימת את תנאי המינימליות אם בכל תת-קבוצה לא ריקה של S יש לפחות איבר מינימלי אחד. ננסח אם כן את עקרון האינדוקציה הכפולה עבור הקס"ח $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{Cart})$ המקיימת את תנאי המינימליות, אולם נפתח בהגדרה הבאה:

**הגדרה 3.2.1:** יהיו $a,b,c,d \in \mathbb{N}$. נאמר ש- $(a,b) <_{Cart} (c,d)$ (קטן ממש) אם $a \leq c$, $b \leq d$ ו- $(a,b) \neq (c,d)$.

כך למשל, $(1,2) <_{Cart} (2,3)$, וגם $(1, 2) <_{Cart} (1, 3)$. בדומה $(1, 2) <_{Cart} (2,2)$. קל לראות זאת אם מתבוננים בתרשים 3.2.1: כל הנקודות באזור הכהה קטנות ממש מהנקודה $(n,m)$.




**תרשים 3.2.1: הנקודות באזור הכהה קטנות מהנקודה (n,m).**

**משפט 3.2.2 (עקרון האינדוקציה הכפולה):** תהי $P(n,m)$ תכונה כלשהי של איברים $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. בסיס האינדוקציה: הטענה $P(0,0)$ נכונה.
2. שלב האינדוקציה: לכל $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, נכונות הטענה $P(s,t)$ לכל $(s,t) <_{Cart} (n,m)$ גוררת את נכונות הטענה $P(n,m)$.

אז הטענה $P(n,m)$ נכונה לכל $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש זוגות $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שעבורם הטענה $P(n,m)$ אינה מתקיימת. כלומר, הקבוצה $A = \{(n,m) \mid n,m \in \mathbb{N}$ הטענה $P(n,m)$ אינה תקפה$\}$ אינה ריקה. מכיוון שהקס"ח $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{Cart})$ מקיימת את תנאי המינימליות, קיים בקבוצה A איבר מינימלי כלשהו $(n_0,m_0)$. לפי הנחה 1 של המשפט, $(n_0,m_0) \neq (0,0)$ שכן הטענה $P(0,0)$ תקפה. כמו-כן, הטענה $P(s,t)$ תקפה לכל $(s,t) <_{Cart} (n_0,m_0)$, כי אחרת $(n_0,m_0)$ לא היה איבר מינימלי ב- A. אולם זו סתירה להנחה 2 של המשפט. □

בסעיף 3.4 הדן ברקורסיה נראה דוגמה לשימוש במשפט זה (ראו דוגמה 3.4.6).

באופן כללי, נוכל לנסח עקרון אינדוקציה דומה עבור כל קבוצה סדורה חלקית המקיימת את תנאי המינימליות. הנה, אם כן, המסגרת הרחבה שאותה חיפשנו ובה ניתן לפתח עד תום את מושג האינדוקציה המתמטית.

**משפט 3.2.3 (העקרון המלא של האינדוקציה):** תהי $(S, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית המקיימת את תנאי המינימליות, ותהי $P(s)$ טענה כלשהי לגבי איבר $s \in S$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. הטענה $P(s)$ תקפה לכל איבר מינימלי s של S.
2. לכל $s \in S$, נכונות הטענה $P(t)$ לכל האיברים $t \in S$ כך ש- $t \leq s$, $t \neq s$, גוררת את נכונות הטענה $P(s)$.

אז הטענה $P(s)$ תקפה לכל $s \in S$.

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש איברים $s \in S$ שעבורם הטענה $P(s)$ אינה מתקיימת. כלומר, הקבוצה $A = \{s \mid s \in S$, הטענה $P(s)$ אינה תקפה$\}$ אינה ריקה. מכיוון שהקס"ח $(S, \leq)$ מקיימת את תנאי המינימליות, קיים בקבוצה A איבר מינימלי כלשהו s. לפי הנחה 1 של המשפט, s איננו אחד מהאיברים המינימליים של הקס"ח $(S, \leq)$, שכן הטענה P תקפה לכל האיברים המינימליים של S. לכן יש איברים t הקטנים מ- s. כמו-כן, הטענה P מתקיימת לכל $t \in S$ כך ש- $t \leq s$, $t \neq s$, כי אחרת s לא היה מינימלי ב- A. אולם זו סתירה להנחה 2 של המשפט. □

מכיוון שכל קבוצה סדורה היטב מקיימת את תנאי המינימליות (ראו סעיף 1.6), ניתן להשתמש בעקרון המלא של האינדוקציה להוכחת טענות על קבוצות סדורות היטב.

## 3.3. הגדרות רקורסיביות

הנושאים שיוצגו: *רקורסיה, הגדרה רקורסיבית של קבוצה. דוגמאות: ביטויים חשבוניים, מחרוזות מאוזנות של סוגריים, אינדוקציה מבנית, סכום $\Sigma$, מכפלה $\Pi$.*

עד כה ראינו כיצד להפוך את האקסיומה של האינדוקציה המתמטית לכלי רב ערך בפתרון בעיות ובהוכחת משפטים. לאקסיומה הזו יש שימושים רבים נוספים. היא מאפשרת לנו לדון בצורה מדויקת בעצמים מסובכים. ללא הגישה הרקורסיבית לא היינו מסוגלים אפילו להגדיר כמה מהמושגים החשובים ביותר במתמטיקה. מדובר בהגדרה של קבוצות, פעולות ומבנים אלגבריים וחישוביים רבים. בסעיף זה נציג כמה מהדוגמאות הבסיסיות. נעיר שלפעמים משתמשים במושג הגדרה אינדוקטיבית במקום הגדרה רקורסיבית.

לקבוצות רבות שבהן נרצה לדון יש מבנה המאפשר לנו להגדירן בצורה נוחה בדרך רקורסיבית.

**הגדרה 3.3.1: הגדרה רקורסיבית של קבוצה** כוללת שני חלקים:
1. **בסיס:** הצהרה כי איברים מסוימים שייכים לקבוצה המוגדרת.
2. **כלל רקורסיבי**: שימוש באיברים שכבר ידוע שהם בקבוצה כדי להגדיר עוד איברים.

**דוגמה 3.3.2:** נגדיר בצורה רקורסיבית את הקבוצה $A$ של כל המספרים הטבעיים המתחלקים ב- 5.

1) בסיס: $5\in A$.

2) כלל רקורסיבי: אם $n\in A$ אז גם $n+5\in A$.

כך למשל, אפשר לוודא כי $15\in A$ בעזרת ההגדרה. על פי סעיף 1 של ההגדרה: $5\in A$. לכן, לפי סעיף 2, גם $5 + 5 = 10 \in A$. ושוב על ידי שימוש בכלל הרקורסיבי בסעיף 2, גם $10 + 5 = 15 \in A$.

**דוגמה 3.3.3:** נגדיר בצורה רקורסיבית את הקבוצה $B$ של כל השלמים הזוגיים.

1) בסיס: $0\in B$.

2) כלל רקורסיבי: אם $n\in B$ אז גם $n-2, n+2\in B$.

**דוגמה 3.3.4:** נגדיר בצורה רקורסיבית את הקבוצה $U \subseteq \mathbb{N}$ הנקראת גם קבוצת Ulam.

1) בסיס: $1\in U$.

2) כלל רקורסיבי: א. אם $x\in U$ אז גם $2x\in U$.

ב. אם $y\in U$ מקיים $y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ אז גם $\frac{y-1}{3} \in U$.

כך למשל, הקבוצה $U$ מכילה את המספרים $1, 2, 4, 8, 16,\ldots$ על ידי שימוש בבסיס ושימוש חוזר בכלל ב' הרקורסיבי. מכיוון ש- $16\in U$ וגם $16 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, אז גם $\frac{16-1}{3} = 5 \in U$ על ידי שימוש בכלל ב'. כעת נוכל לומר שגם $2\cdot 5=10\in U$, ומכאן לפי כלל ב' גם $3\in U$.

בעיה פתוחה במתמטיקה היא האם $U = \mathbb{N}$, כלומר, האם כל מספר טבעי שייך לקבוצת Ulam. לרוב מציגים את השאלה הזו כך: בוחרים מספר טבעי כלשהו $x$. אם $x$ זוגי, מחלקים אותו ב- 2. אם $x$ אי-זוגי, מחליפים אותו ב- $3x + 1$. חוזרים על אותו תהליך עם המספר החדש המתקבל, וכך הלאה. הבעיה היא האם מכל נקודת מוצא $x$ מגיעים בסופו של דבר למספר 1. כאמור זו בעיה פתוחה כבר קרוב למאה שנים. היא אומתה באמצעות מחשב לכל $x$ מ- 1 ועד $2^{40}$.

## הגדרות רקורסיביות בשפות תכנות

תחום חשוב במדעי המחשב עוסק בתכנונן של שפות תכנות ובניתוחן. תיאור מדויק של שפת תכנות מחייב שימוש נרחב בהגדרות רקורסיביות. הגדרות אלה חשובות כמובן למתכנת הכותב בשפת התכנות הנדונה, כדי שידע להשתמש בשפה בצורה נכונה. אולם ההגדרות מהוות גם את הבסיס לפענוח הנכון במחשב של תוכנית הכתובה בשפה האמורה. תוכנית מחשב הכתובה בשפת תכנות כלשהי עוברת בדיקה של תקינות דקדוקית, ואחריה ניתוח המוביל לביצוע נאות של התוכנית על ידי המחשב. פעולות אלה מתבצעות על ידי תוכנית מחשב אחרת הקרויה מהדר (Compiler) לשפת התכנות האמורה. פיתוח מהדר לשפת תכנות מתבסס בהכרח על ההגדרות הרקורסיביות של שפת התכנות. זהו תחום עיסוק שלם בפני עצמו במדעי המחשב. אנו נסתפק כאן בכמה דוגמאות פשוטות.

**דוגמה 3.3.5 (הגדרת ביטויים חשבוניים):** כמעט כל תוכנית מחשב כוללת פעולות חשבוניות רבות. נגדיר בצורה רקורסיבית את הקבוצה E של הביטויים החשבוניים עם סוגריים והפעולות החשבוניות $+, -, *, /$.

1) בסיס: כל מספר הוא ביטוי.
2) כלל רקורסיבי: אם $a,b\in E$ ביטויים חשבוניים אז גם $(a+b), (a-b), (a*b)\in E$, ואם $b \neq 0$ אז גם $(a/b)\in E$.

כך למשל, הביטויים החשבוניים $(1+2), ((1+2)-(3*14))$ שייכים לקבוצה E. נסו להרחיב את ההגדרה כך שתאפשר לכתוב גם ביטויים חשבוניים עם פעולת החזקה.

**דוגמה 3.3.6 (הגדרת מחרוזות ומשתנים):** בנוסף לביטויים חשבוניים כוללת כל תוכנית מחשב גם מילים שונות כגון משתנים, מילים שמורות, שמות פונקציות ועוד. כדי להגדיר מושגים אלה נגדיר תחילה את מושג **המחרוזת**.

תהי $\Sigma$ קבוצה סופית כלשהי שתיקרא כאן א״ב. איברי הקבוצה $\Sigma$ ייקראו בהקשר זה אותיות. בעזרת אותיות הא״ב אפשר להגדיר בצורה רקורסיבית את הקבוצה $\Sigma^+$ של כל המילים שאפשר לבנות מאותיות הא״ב $\Sigma$. מילים אלה נקראות גם מחרוזות.

1) בסיס: כל אות $a\in\Sigma$ היא מחרוזת.
2) כלל רקורסיבי: אם $\alpha,\beta\in\Sigma^+$ שתי מחרוזות אז גם $\alpha\beta\in\Sigma^+$ מחרוזת.
הפעולה של יצירת המחרוזת החדשה $\alpha\beta$ מהמחרוזות $\alpha, \beta$ נקראת **שרשור.**

מחרוזת מיוחדת היא המחרוזת הריקה $\varepsilon$. בדומה לקבוצה הריקה שאינה מכילה כלל איברים, המחרוזת הריקה היא מחרוזת שאינה כוללת אותיות ואורכה כמובן 0. אם נוסיף את $\varepsilon$ ל- $\Sigma^+$ נקבל את הקבוצה $\Sigma^*$ הכוללת את כל המחרוזות שאפשר לבנות מאותיות הא״ב $\Sigma$.

בעזרת פעולת השרשור שהגדרנו על מחרוזות, נגדיר כעת רקורסיבית משתנים חוקיים בשפת התכנות C:

1) בסיס: כל אותיות הא"ב באנגלית הן משתנים חוקיים.
2) כלל רקורסיבי: יהיו a, b שני משתנים חוקיים ויהי n מספר טבעי. אז גם המחרוזות ab, an הן משתנים חוקיים.

כך למשל המחרוזות flag, flag1, flag2 הם משתנים חוקיים ב- C, ואילו 2flag אינו משתנה חוקי.

## מחרוזות מאוזנות של סוגריים

אנו משתמשים בקביעות בסוגריים לשם כתיבת ביטויים חשבוניים. אם נסתכל רק על הסוגריים שבביטוי ונתעלם מיתר איברי הביטוי, כמו מספרים ופעולות חשבוניות, נראה שמחרוזת הסוגריים המתקבלת מקיימת שני כללים פשוטים. מספר הסוגריים השמאליים שווה למספר הסוגריים הימניים, ובכל רישא (קטע התחלתי) של המחרוזת מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים. מחרוזת כזאת של סוגריים נקראת מחרוזת מאוזנת. מעבד תמלילים או מהדר צריכים לבדוק בין היתר האם ביטוי הכולל סוגריים בנוי ממחרוזת מאוזנת של סוגריים.

**הגדרה 3.3.7:** מחרוזת הבנויה מסוגריים (,) נקראת **מאוזנת** אם:
1. מספר הסוגריים השמאליים ) במחרוזת שווה למספר הסוגריים הימניים ( במחרוזת.
2. בכל רישא (התחלה) של המחרוזת, מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים.

כך למשל , המחרוזות ( ( ) ) ו- ( ( ) ( ) ( ) ) מאוזנות, ואילו המחרוזת ( ) ) אינה מאוזנת כי מספר הסוגריים השמאליים גדול ממספר הסוגריים הימניים. כך גם המחרוזת ) ( ( ) אינה מאוזנת כי ברישא ( ( ) יש יותר סוגריים ימניים מאשר שמאליים.

אף כי ההגדרה האחרונה מגדירה היטב מהן מחרוזות מאוזנות, היא אינה מספקת דרך ברורה לייצר סדרות כאלה. לעומתה ההגדרה הרקורסיבית הבאה מאפשרת לנו לייצר מחרוזות מאוזנות של סוגריים בעזרת מחרוזות קצרות יותר.

הקבוצה D של מחרוזות מאוזנות של סוגריים מוגדרת על ידי:

1) בסיס: המחרוזת הריקה שייכת ל- D.
2) כלל רקורסיבי: אם $a,b\in D$ אז (a) מחרוזת מאוזנת וכן ab מאוזנת.

עלינו להוכיח כמובן ששתי ההגדרות, הרקורסיבית והלא רקורסיבית אכן מגדירות אותה קבוצה. ההוכחה תהיה באינדוקציה. הוכחה כזאת נקראת לעתים הוכחה **באינדוקציה מבנית**, כיוון שהיא מתבססת על מבנה האיברים בקבוצה.

**משפט 3.3.8:** הקבוצה D כוללת בדיוק את כל המחרוזות המאוזנות של סוגריים.

נפצל את הוכחת המשפט לשתי טענות.

**טענה 3.3.9:** תהי $x \in D$. אז מספר הסוגריים הימניים שווה למספר הסוגריים השמאליים ב- x.
**הוכחה:** נוכיח באינדוקציה על אורך המחרוזת x.
בסיס האינדוקציה: המחרוזת הריקה ודאי מקיימת זאת.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות למחרוזות באורך $0,1,2,...,n-1$ ונוכיח למחרוזת $x \in D$ שאורכה $n > 0$. המחרוזת x מהצורה $x = (a)$ או $x = ab$ כאשר a,b מחרוזות מאוזנות ולא ריקות.
אם $x = (a)$ אז האורך של a קטן משל x. מכאן על פי הנחת האינדוקציה מספר הסוגריים השמאליים ב- a שווה למספר הסוגריים הימניים ב- a, ולכן גם ב- x (שני המספרים גדלים ב- 1).
אם $x = ab$ כש- a,b אינן ריקות, אז האורך של a קטן משל x וכך גם לגבי b. לכן על פי הנחת האינדוקציה מספר הסוגריים השמאליים ב- a שווה למספר הסוגריים הימניים ב- a, וכך גם ב- b, ולכן גם ב- x. □

**טענה 3.3.10:** תהי $x \in D$. אז בכל רישא של x מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים.
**הוכחה:** נוכיח באינדוקציה על אורך המחרוזת x.
בסיס האינדוקציה: המחרוזת הריקה ודאי מקיימת זאת.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות למחרוזות באורך $0,1,2,...,n-1$ ונוכיח למחרוזת $x \in D$ שאורכה $n > 0$. המחרוזת x מהצורה $x = (a)$ או $x = ab$ כאשר a,b מחרוזות מאוזנות ולא ריקות.
אם $x = (a)$ אז האורך של a קטן משל x. מכאן על פי הנחת האינדוקציה בכל רישא של a מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים. כל רישא של x היא מהצורה $(\alpha$ כאשר $\alpha$ רישא כלשהי של a (ייתכן גם $\alpha = \varepsilon$). על פי הנחת האינדוקציה מספר הסוגריים השמאליים ב- $\alpha$ גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים בה. לכן ודאי שהדבר נכון גם לגבי הרישא $(\alpha$ של x.
אם $x = ab$ כש- a,b אינן ריקות, אז האורך של a קטן משל x וכך גם לגבי b. לכן על פי הנחת האינדוקציה בכל רישא של a מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים, וכך גם לגבי b. באופן דומה למקרה הקודם, מראים כעת שבכל רישא של x מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים. במקרה שמדובר ברישא של x הכוללת את כל a ורישא באורך כלשהו של b, אנו נשתמש גם בהנחת האינדוקציה לגבי רישות של b, וגם בהנחת האינדוקציה לגבי הרישא של a הכוללת את כל a. השלימו את הפרטים. □

כדי להשלים את ההוכחה של המשפט ש- D היא קבוצת כל המחרוזות המאוזנות של סוגריים, יש להוכיח גם את הכיוון השני, כלומר שכל מחרוזת מאוזנת של סוגריים שייכת לקבוצה D. הוכחה זו תינתן כתרגיל (ראו תרגיל 2).

## סכום ומכפלה של n מספרים

גם הגדרות רבות מתחום המתמטיקה עצמה הן רקורסיביות. כך למשל ההגדרה הפורמלית של סכום או מכפלה של n מספרים היא הגדרה רקורסיבית. נשתמש בסימון הבא.

**סימון:** יהיו $x_1,x_2,\dots,x_n$ מספרים כלשהם. **הסכום** $x_1+x_2+\dots+x_n$ יסומן על ידי $\sum_{i=1}^{n} x_i$. **המכפלה** $x_1\cdot x_2\cdots x_n$ תסומן על ידי $\prod_{i=1}^{n} x_i$.

סכום של n מספרים מוגדר רקורסיבית כך:

1) **בסיס**: אם $n = 0$ אז $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

2) **כלל רקורסיבי**: אם $n > 0$ נגדיר את $\sum_{i=1}^{n} x_i$ באופן הבא: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n$.

באופן דומה, המכפלה של n מספרים מוגדרת בדרך רקורסיבית כך:

1) **בסיס**: אם $n = 0$ אז $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$

2) **כלל רקורסיבי**: אם $n > 0$ נגדיר את $\prod_{i=1}^{n} x_i$ באופן הבא: $\prod_{i=1}^{n} x_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)\cdot x_n$.

בפרט, מהגדרות אלה ברור גם מהו סכום של איבר אחד או מכפלה של איבר אחד, שכן עבור $n = 1$ נקבל: $\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1$ ואילו $\prod_{i=1}^{1} x_i = x_1$.

אפשר גם להגדיר סכום מהצורה $x_r + x_{r+1} + \dots + x_s$ באופן הבא:

1) **בסיס**: אם $r \ge s$ אז $\sum_{i=r}^{s} x_i = 0$

2) **כלל רקורסיבי**: אם $s > r$ נגדיר את $\sum_{i=r}^{s} x_i$ באופן הבא: $\sum_{i=r}^{s} x_i = \sum_{i=r}^{s-1} x_i + x_s$.

כמו כן אם I קבוצה של אינדקסים אז מגדירים את $\sum_{i\in I} x_i$ כך:

1) **בסיס**: אם $I = \varnothing$ אז $\sum_{i\in I} x_i = 0$.

2) **כלל רקורסיבי**: אם $I \ne \varnothing$ ו- $j\in I$ איבר כלשהו, אז $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i + x_j$.

באופן דומה אפשר להגדיר גם מכפלה מהצורה $\prod_{i=r}^{s} x_i$ או $\prod_{i\in I} x_i$.

## תכונות של סכומים

קל לוודא את התכונות הבאות של סכומים:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ כאשר $1 \le k < n$.
2. $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$ כאשר c קבוע כלשהו.
3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.
4. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$.

   במקרה זה גם כותבים לעתים את הסכום הכפול בקיצור כך: $\sum_{\substack{1\le i\le n,\\ 1\le j\le m}} a_{ij}$.
5. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ כלומר אפשר להחליף את סדר הסכימה.

לא קשה להוכיח את הטענות שלהלן:

1. $\sum_{i\in I} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i\in I} a_i$ כאשר c קבוע כלשהו.
2. $\sum_{i\in I} (a_i + b_i) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i\right)$.
3. $\sum_{i\in I, j\in J} (a_i \cdot b_j) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j\in J} b_j\right)$.

אפשר לנסח תכונות דומות למכפלה.

### תרגילים

1. מצאו הגדרות רקורסיביות לקבוצות הבאות:
   א. קבוצת המספרים הטבעיים.
   ב. קבוצת כל השלמים החיוביים האי-זוגיים.
   ג. קבוצת כל השלמים השליליים הזוגיים.

2. הוכיחו כי כל מחרוזת של סוגריים המקיימת את הגדרה 3.3.7 שייכת לקבוצה D כפי שהוגדרה רקורסיבית.

3. תנו הגדרה רקורסיבית לסכום הכפול $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}$.
4. הוכיחו כי $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}$.

## 3.4. נוסחאות נסיגה

הנושאים שיוצגו: *הגדרה רקורסיבית של פונקציה, נוסחת נסיגה, נוסחה מפורשת, הוכחת פתרון של נוסחת נסיגה על ידי אינדוקציה, מחלק משותף מקסימלי.*

בדומה להגדרתן של קבוצות בצורה רקורסיבית, אפשר גם להגדיר פונקציות בצורה רקורסיבית. כך, נחשב את ערכה של פונקציה במספר כלשהו על ידי שימוש בערכי הפונקציה במספרים קטנים יותר. מכיוון שהגדרה רקורסיבית דורשת שימוש בערכי הפונקציה במספרים קטנים יותר, דרוש סדר על המספרים, ולכן נגביל את הדיון לפונקציות המוגדרות על הטבעיים. כפי שראינו בסעיף 3.2, עקרון האינדוקציה המתמטית תקף גם כאשר מדובר בקבוצה סדורה חלקית המקיימת את תנאי המינימליות. אכן, אנו נגדיר גם פונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, אך לא נרחיב כאן מעבר לכך. נפתח בדוגמה פשוטה.

**דוגמה 3.4.1:** פונקצית העצרת $f(n) = 1\cdot2\cdot3\cdots n = n!$ מקיימת את הזהות הפשוטה $n! = (n-1)!n$, כאשר n מספר טבעי כלשהו. עובדה זו מאפשרת לנו לחשב בצורה רקורסיבית את הביטוי $n!$. נחשב תחילה את $(n-1)!$, נכפיל את התוצאה שקיבלנו ב- n ונקבל את $n!$. אולם כיצד נחשב את $(n-1)!$? נשתמש שוב בנוסחה הרקורסיבית $(n-1)! = (n-2)!(n-1)$. כלומר נחשב את $(n-2)!$ ונכפיל את התוצאה המתקבלת ב- $(n-1)$. כדי שהתהליך הרקורסיבי הזה יסתיים בשלב כלשהו, עלינו להגדיר גם ערך התחלתי או תנאי עצירה. במקרה של הפונקציה $n!$ נוהגים להגדיר $0! = 1$. משילוב עובדות אלה מתקבלת ההגדרה הרקורסיבית הבאה של פונקצית העצרת:

1) ערך התחלה: $f(0) = 1$.
2) כלל רקורסיבי: $f(n) = n\cdot f(n-1)$ לכל $n > 0$.

כפי שראינו, הערך של הפונקציה $f(n) = n!$ ניתן לביטוי כתלות רק בערכה של הפונקציה במספר $n-1$. אולם יש פונקציות שכדי לקבוע את ערכן ב- n, דרושים ערכי הפונקציה בכמה מספרים קודמים. באופן כללי הגדרה רקורסיבית של פונקציה שתחומה הטבעיים תיראה כך:

**הגדרה 3.4.2:** תהי A קבוצה כלשהי ותהי $f:\mathbb{N}\to A$ פונקציה. **הגדרה רקורסיבית** של f תכלול:

1. **ערכי התחלה**: קביעת הערכים $f(0), f(1),...,f(k)$ כאשר k מספר טבעי כלשהו.
2. **כלל רקורסיבי**: הגדרת $f(n)$, לכל $n > k$, בעזרת הערכים $f(n-1), f(n-2),...,f(1), f(0)$, או בעזרת חלק מערכים אלה.

ההגדרה של $f(n)$ על ידי ערכים קודמים נקראת גם **נוסחת נסיגה** או **נוסחה רקורסיבית**.

**דוגמה 3.4.3:** נגדיר בצורה רקורסיבית את הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ הנתונה על ידי $f(n) = 2^n$.
מכיוון ש- $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ ואילו $2^0 = 1$, מקבלים מיד את ההגדרה הרקורסיבית הפשוטה הבאה:

1) ערך התחלה: $f(0) = 1$.
2) כלל רקורסיבי: $f(n) = 2f(n-1)$ לכל מספר טבעי $n > 0$.

כדי לחשב את $f(4)$, נשתמש בנוסחת הנסיגה שוב ושוב עד שנגיע לערך ההתחלה:

$$f(4) = 2 \cdot f(3) = 2 \cdot 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4.$$

אולם אפשר לחשב את $2^n$ גם בדרך הרקורסיבית הבאה. נשים לב ש- $2^n = 2^{n/2} \cdot 2^{n/2}$ כאשר $n$ מספר טבעי זוגי, ואילו $2^n = 2 \cdot 2^{(n-1)/2} \cdot 2^{(n-1)/2}$ כאשר $n$ אי-זוגי. משילוב שתי עובדות אלה נקבל את ההגדרה הרקורסיבית הבאה לפונקציה $f(n) = 2^n$.

1) ערך התחלה: $f(0) = 1$.
2) כלל רקורסיבי: $f(n) = \left(f\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2$ כאשר $n > 0$ מספר זוגי.
$f(n) = 2\left(f\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^2$ כאשר $n > 0$ מספר אי-זוגי.

אם נרצה כעת לחשב את $f(4)$ בעזרת נוסחה זו נקבל $f(4) = f(2)^2 = f(1)^4 = (2f(0))^4 = 2^4$ כנדרש.

שתי ההגדרות הרקורסיביות שראינו ל- $f(n) = 2^n$ הן שקולות במובן זה שהן מגדירות בדיוק אותה הפונקציה. אולם מן ההיבט של יעילות החישוב, להגדרה השנייה יש יתרון. עניין זה ודומיו נדונים בקורסים העוסקים בסיבוכיות החישוב.

**אתגר:** כמה צעדים רקורסיביים דרושים לחישוב $f(n) = 2^n$ בעזרת הנוסחה הרקורסיבית הראשונה, וכמה בעזרת השנייה? באיזו נוסחה מספר השלבים יהיה קטן יותר כאשר $n$ מספר גדול יחסית, למשל $n = 1024$?

בדוגמאות שראינו עד כה ניתן היה לבטא את ערכה של הפונקציה $f$ במספר $n$ כתלות רק בערכה של הפונקציה במספר אחד הקטן מ- $n$. נראה כעת דוגמה לכך שערכה של הפונקציה $f$ ב- $n$ תלוי בכל המספרים הקטנים מ- $n$.

**דוגמה 3.4.4:** נראה הגדרה רקורסיבית נוספת לפונקציה $f(n) = 2^n$.

1) ערך התחלה: $f(0) = 1$.
2) כלל רקורסיבי: $f(n) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$ לכל $n > 0$.

נחשב למשל את $f(3)$ בעזרת הנוסחה הרקורסיבית. תחילה נחשב את $f(1), f(2)$. על ידי שימוש בנוסחה הרקורסיבית נקבל:

$$f(1) = 1 + f(0) = 1+1 = 2.$$

בדומה:

$$f(2) = 1+ f(0) + f(1) = 1 + 1 + 2 = 4.$$

וכעת:

$$f(3) = 1 + f(0) + f(1) + f(2) = 1 + 1 + 2 + 4 = 8.$$

נוסחאות נסיגה מאפשרות אמנם לחשב את ערכה של פונקציה במספר $n$ על ידי שימוש חוזר בנוסחה, אולם דרך זו מייגעת למדי עבור ערכים גבוהים. בפרק 6 נלמד שיטות שונות המאפשרות במקרים רבים למצוא **נוסחה מפורשת** ל- $f(n)$ מתוך נוסחת הנסיגה. הנוסחה המפורשת של $f(n)$ נקראת גם **פתרון של נוסחת הנסיגה**.
בסעיף זה נסתפק באימות הפתרון. כלומר, בהינתן נוסחה מפורשת כלשהי ל- $f(n)$, נרצה להוכיח שהנוסחה המפורשת ונוסחת הנסיגה מגדירות את אותה הפונקציה. בשל הקשר ההדוק בין אינדוקציה לרקורסיה, ניתן להוכיח זאת בקלות יחסית בעזרת אינדוקציה מתמטית.

**טענה 3.4.5:** תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:
1. ערך התחלתי: $f(0) =1$.
2. כלל רקורסיבי: $f(n) = 3f(n-1)+5$ לכל $n > 0$.

אז $f(n) = \dfrac{7 \cdot 3^n - 5}{2}$ לכל $n \geq 0$.

**הוכחה:** נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n$.
בסיס האינדוקציה: $n = 0$, ואכן על פי הנוסחה הרקורסיבית $f(0) = 1$, וגם על פי הנוסחה המפורשת שבטענה $f(0) = \dfrac{7 \cdot 3^0 - 5}{2} = 1$.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל- $(n-1)$ ונוכיח ל- $n$.
על פי נוסחת הנסיגה $f(n) = 3f(n-1) + 5$. כעת נשתמש בהנחת האינדוקציה עבור $f(n-1)$, ונקבל:

$$f(n) = 3f(n-1) + 5 = 3 \cdot \frac{7 \cdot 3^{n-1} - 5}{2} + 5 = \frac{7 \cdot 3^n - 5}{2}$$

כנדרש. לכן, על פי עקרון האינדוקציה המתמטית זה אכן פתרון נוסחת הנסיגה. □

כפי שצוין אפשר להגדיר רקורסיבית גם פונקציה שתחומה הקבוצה $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. נפתח בדוגמה פשוטה.

**דוגמה 3.4.6:** תהי $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:
1) תנאי התחלה: $f(0,0) = 1$.
2) כלל רקורסיבי: $f(n,m) = 2f(n-1,m)$ לכל $n > 0,\ m \geq 0$
$f(n,m) = 3f(n,m-1)$ לכל $n \geq 0,\ m > 0$.

כך אפשר לחשב את $f(3,2)$ באופן הבא:

$$f(3,2) = 2f(2,2) = 2\cdot 2f(1,2) = 2\cdot 2\cdot 2f(0,2) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3f(0,1) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3f(0,0) = 2^3 3^2.$$

נוכיח כעת ש- $f(n,m) = 2^n 3^m$ לכל $n, m \geq 0$.
**הוכחה:** נוכיח בעזרת עקרון האינדוקציה הכפולה שהטענה נכונה לכל $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, כאשר יחס הסדר שבו נשתמש הוא $(a,b) < (c,d)$ אם ורק אם $a \leq c$, $b \leq d$ וגם $(a,b) \neq (c,d)$.
בסיס האינדוקציה: $f(0,0) = 1$ לפי נוסחת הנסיגה, ואכן $2^0 3^0 = 1$.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לכל הזוגות $(s,t)$ הקטנים מ- $(n,m)$ ונוכיח ל- $(n,m) > (0,0)$.
מכיוון ש- $(n,m) > (0,0)$ אז או ש- $n > 0$ או ש- $m > 0$. נניח ש- $n > 0$. לכן, אפשר להשתמש בנוסחת הנסיגה ולקבל:

$$f(n,m) = 2f(n-1,m).$$

מכיוון ש- $(n-1,m) < (n,m)$, אפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה עבור $(n-1, m)$ ולקבל:

$$f(n,m) = 2f(n-1,m) = 2\cdot 2^{n-1}3^m = 2^n 3^m$$

כנדרש. באופן דומה מוכיחים את הטענה אם $m > 0$, תוך שימוש בכלל הרקורסיבי השני $f(n,m) = 3f(n,m-1)$. □

## המחלק המשותף המקסימלי

לפונקציה הבאה יש חשיבות רבה בתורת המספרים וגם שימושים רבים במדעי המחשב.

**הגדרה 3.4.7:** יהיו $n,m$ שני מספרים טבעיים כאשר $n > 0, m \geq 0$. **המחלק המשותף המקסימלי** של $n$ ו- $m$ הוא המספר הטבעי המקסימלי $d$ שמחלק גם את $n$ וגם את $m$, כלומר $d \mid n,\ d \mid m$.
נסמן את פונקצית המחלק המשותף המקסימלי על ידי $\gcd(n,m) = d$ (אלה ראשי תיבות של Greatest Common Divisor).

כיצד נמצא את המחלק המשותף המקסימלי של שני מספרים? נניח ש- $m < n$. במקרה זה אפשר כמובן לנסות ולחלק את $n$ ואת $m$ ב- $m$, $m-1$, $m-2$,... ולהפסיק ברגע שמתגלה מספר המחלק גם את $n$ וגם את $m$. אולם דרך זו מייגעת ועלולה לקחת זמן רב, שכן במקרה הגרוע נחלק את $n$ ואת $m$ בכל המספרים $m$, $m-1$, $m-2$, ..., $2$, $1$, עד שנגלה כי רק המספר 1 מחלק את שניהם. השיטה הבאה, הנקראת האלגוריתם של אוקלידס, מחשבת בצורה רקורסיבית את המחלק המשותף המקסימלי במהירות רבה בהרבה מהדרך הנאיבית שתוארה כרגע. אולם נפתח בהגדרה.

**הגדרה 3.4.8:** יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ שני מספרים טבעיים כאשר $m > 0$. נסמן את **השארית** המתקבלת מחלוקת $n$ ב- $m$ על ידי **n mod m**.

נעיר שסימון זה מקובל יותר במדעי המחשב מאשר במתמטיקה לסימון השארית. כך למשל, $10 \bmod 3 = 1$, $12 \bmod 4 = 0$ ואילו $4 \bmod 12 = 4$.

האלגוריתם של אוקלידס:
**ערכי התחלה:** $\gcd(n, 0) = n$ לכל $n > 0$.
**כלל רקורסיבי:** $\gcd(n,m) = \gcd(m, n \bmod m)$ אם $n,m > 0$.

כך למשל, אם נרצה למצוא את המחלק המשותף המקסימלי של 36 ו- 81 נשתמש בנוסחת הנסיגה המתוארת באלגוריתם ונקבל:

$$\gcd(81, 36) = \gcd(36, 81 \bmod 36) = \gcd(36, 9) = \gcd(9, 36 \bmod 9) = \gcd(9, 0) = 9$$

כלומר המחלק המשותף המקסימלי הוא 9. בדוגמה זו היו רק שני צעדים שבהם הפעלנו את הכלל הרקורסיבי עד שהגענו לערך ההתחלה. לו היינו מנסים למצוא את המחלק המשותף המקסימלי של 81 ו- 36 בדרך הנאיבית שתוארה למעלה, היינו צריכים לנסות ולחלק את 81 ו- 36 בכל המספרים 36, 35, 34,...,9, כדי לגלות כי 9 הוא המספר הטבעי הגדול ביותר אשר מחלק את שניהם!

נכונותו של האלגוריתם של אוקלידס נובעת ישירות מהמשפט הבא.

**משפט 3.4.9:** יהיו $n,m$ שני מספרים טבעיים כאשר $n, m > 0$. אז $\gcd(n,m) = \gcd(m, n \bmod m)$.
**הוכחה:** אם $n < m$ אז $n \bmod m = n$, ואז ודאי $\gcd(n,m) = \gcd(m,n) = \gcd(m, n \bmod m)$.
כמו-כן, אם $n = m$ אז $\gcd(n,m) = m$ ואכן $\gcd(m, n \bmod m) = \gcd(m, 0) = m$.
נניח לכן ש- $n > m$. לכן קיימים שני מספרים טבעיים $q,r$ כאשר $0 \le r < m$, כך ש- $n = qm+r$, וכמובן $r = n \bmod m$. עלינו להוכיח ש- $\gcd(n,m) = \gcd(m,r)$. יהי $d_1 = \gcd(n,m)$ ו- $d_2 = \gcd(m,r)$.
מצד אחד, המספר $d_1$ מחלק גם את $n$ וגם את $m$ ללא שארית. לכן, $d_1$ מחלק גם את $r = n - q \cdot m$ ללא שארית. כלומר $d_1$ הוא מחלק משותף של $m,r$, ולכן $d_2 \ge d_1$ (כי $d_2$ הוא המחלק המשותף המקסימלי של $m,r$).
מצד שני, $d_2$ מחלק את $m$ ואת $r$ ללא שארית, ולכן $d_2$ מחלק גם את המספר $n = q \cdot m + r$ ללא שארית. כלומר $d_2$ הוא מחלק משותף של $n,m$, ולכן $d_1 \ge d_2$.
משילוב שני האי-שוויונות נקבל כי $d_1 = d_2$ כנדרש. □

שימו לב שהאלגוריתם של אוקלידס אכן יסתיים לאחר מספר סופי של צעדים, וזאת מכיוון שהמספרים הולכים וקטנים (פרט אולי לשלב הראשון). אולם אין זה פשוט כלל לברר בכמה צעדים ייחשב האלגוריתם של אוקלידס את המחלק המשותף המקסימלי של זוג מספרים $n,m$.

**אתגר:** כמה שלבים רקורסיביים יהיו לכל היותר בשיטה של אוקלידס עבור זוג מספרים $n,m$?

למעשה האלגוריתם של אוקלידס מאפשר לנו להביע את המחלק המשותף המקסימלי של שני מספרים $n,m$ כסכום של שני מספרים אלה באופן הבא.

**משפט 3.4.10:** יהיו $n,m$ שני מספרים טבעיים. אז קיימים שני מספרים שלמים $x,y$ כך ש- $\gcd(n,m) = n \cdot x + m \cdot y$.
**הוכחה:** ההוכחה תהיה באינדוקציה על המספר $t$ של השלבים הרקורסיביים שהאלגוריתם של אוקלידס מבצע בחישוב $\gcd(n,m)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $n > m$.
בסיס האינדוקציה: $t = 1$, ואכן $\gcd(n,0) = n = 1 \cdot n + 0 \cdot m$, ולכן נגדיר $x = 1$, $y = 0$.

שלב האינדוקציה: נניח שהמשפט נכון לכל זוגות המספרים n,m שעבורם האלגוריתם של אוקלידס מחשב את המחלק המשותף המקסימלי בפחות מ- t שלבים, ויהיו n,m זוג מספרים שעבורם נדרשים $t > 1$ שלבים לחישוב gcd(n,m).

נפעיל צעד אחד של האלגוריתם של אוקלידס. על פי ההנחה $n > m$, ולכן קיימים שני מספרים טבעיים q,r כאשר $0 \le r < m$, כך ש- $n = qm + r$, ו- $n \bmod m = r$. לכן, לאחר צעד אחד של האלגוריתם נקבל $\gcd(n,m) = \gcd(m,r)$. כמו-כן נדרשים $t-1$ שלבים לחישוב gcd(m,r), ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיימים שני מספרים שלמים $x'$, $y'$ כך ש-

$$\gcd(m, r) = m \cdot x' + r \cdot y'.$$

לכן:

$$\gcd(n, m) = \gcd(m, r) = m \cdot x' + r \cdot y' = m \cdot x' + (n - mq) \cdot y' = n \cdot y' + m \cdot (x' - qy').$$

נגדיר לכן $x = y'$, $y = x' - qy'$ ונקבל את הדרוש. □

שימו לב שהמספרים x,y שמובטחים במשפט האחרון אינם חייבים להיות חיוביים. בעצם, לא ייתכן ששניהם חיוביים (הוכיחו!). כך למשל, ראינו ש- $\gcd(81, 36) = 9$. ואכן $9 = 1\cdot 81 - 2\cdot 36$, כלומר $x = 1$, $y = -2$.

## תרגילים

1. נוסחת הנסיגה המתארת את סדרת פיבונאצ'י (ראו סעיף 4.4) היא:

   $F(1) = 1$, $F(0) = 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ לכל $n > 1$.

   הוכיחו באינדוקציה שפתרון נוסחת הנסיגה הזאת הוא:

   $$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$ לכל $n \ge 0$.

   במקרה זה יהיה עליכם להוכיח בבסיס האינדוקציה את נכונות הטענה ל- $n = 0$ ול- $n = 1$.

2. תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

   $f(1) = 2$, $f(n) = f(n-1) + 2n$ לכל $n > 1$.

   הוכיחו באינדוקציה שפתרון הנוסחה הוא $f(n) = n(n+1)$ לכל $n \ge 1$.

3. תהי $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

   $g(3) = 3$, $g(2) = 2$, $g(1) = 1$,

   $g(n) = g(n-3) + g(n-2) + g(n-1)$ לכל $n > 3$.

   הוכיחו באינדוקציה ש- $g(n) < 2^n$ לכל $n \ge 1$.

4. תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה (כבדוגמה 3.4.4):

   $f(0) = 1$, $f(n) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$ לכל $n > 0$.

   הוכיחו באינדוקציה כי $f(n) = 2^n$ לכל $n \ge 0$.

5. א. חשבו את gcd(124, 32) בעזרת האלגוריתם של אוקלידס. כמה שלבים רקורסיביים

היו בחישוב שלכם?

ב. יהיו $a,b$ שני מספרים טבעיים זרים (כלומר אין מספר טבעי $c > 1$ המחלק את שניהם). הוכיחו שקיימים שני מספרים שלמים $x,y$ כך ש- $1 = a\cdot x + b\cdot y$.

6. א. הוכיחו את המשפט הידוע הבא בתורת המספרים (של פרובניוס Frobenius):
יהיו $a,b$ שני מספרים טבעיים זרים. אז כל מספר $n \geq a\cdot b$ ניתן לרשום בצורה $n = ax + by$ כאשר $x,y$ מספרים טבעיים.
הדרכה: היעזרו בסעיף ב׳ של שאלה 5.

ב. למעשה המשפט הזה נכון לכל $n \geq (a-1)(b-1)$. הוכיחו שהחסם הזה הדוק, כלומר את המספר $n = (a-1)\cdot(b-1)-1$ אי-אפשר להציג כך.

7. הפונקציה $\log^* n$ מוגדרת באופן לא פורמלי כמספר הפעמים שיש להוציא log מהמספר n כדי לקבל מספר הקטן או שווה ל- 1. פורמלית, נגדיר תחילה באופן רקורסיבי את הפונקציה $\log^{(i)} n$ באופן הבא:

$$\log^{(i)} n = \begin{cases} n, & i = 0 \\ \log(\log^{(i-1)} n), & i > 0, \log^{(i-1)} n > 0 \end{cases}$$

בכל מקרה אחר הפונקציה $\log^{(i)} n$ אינה מוגדרת. כעת נגדיר את $\log^* n$ כערך המינימלי i שעבורו $\log^{(i)} n \leq 1$.
חשבו את $\log^* n$ עבור $n = 2, 4, 16, 65536$.

8. הפונקציה של אקרמן מוגדרת כך:

$$A(n,m) = \begin{cases} m+1, & n = 0 \\ A(n-1,1), & m = 0 \\ A(n-1, A(n,m-1)), & n,m \neq 0 \end{cases}.$$

חשבו את $A(2,5)$, $A(3,3)$, $A(3,5)$, $A(4,1)$ (מומלץ לכתוב תוכנית מחשב שתחשב זאת).

## הערות היסטוריות

**אוקלידס מאלכסנדריה Euclid of Alexandria (אלכסנדריה, מצרים. נולד בסביבות 325 לפני הספירה, מת בסביבות 265 לפני הספירה).** המתמטיקאי הידוע ביותר של העת העתיקה. אוקלידס ידוע בעיקר בשל ספרו ״היסודות״ (The Elements) הכולל 13 כרכים. יש כמה השערות לגבי מקום לידתו, וחלק מהבלבול בקרב ההיסטוריונים נובע מכך שאוקלידס היה שם נפוץ בתקופתו. יש שלוש השערות מקובלות לגבי אוקלידס ואלו הן:

1. אוקלידס היה דמות היסטורית והוא כתב את הספר ״היסודות״.
2. אוקלידס היה המנהיג של קבוצת מתמטיקאים שפעלה באלכסנדריה, וכולם תרמו לכתיבת הספר ״היסודות״.
3. אוקלידס לא היה דמות היסטורית, אלא עבודותיו נכתבו על ידי קבוצת מתמטיקאים שקראה לעצמה אוקלידס על שם הפילוסוף אוקלידס ממגרה Megara שחי 100 שנים קודם לכן.

בכל אופן, יהא אשר יהא אוקלידס, הספר "היסודות" קיבץ ידע רב שנאגר במתמטיקה עד אז, ושימש מתמטיקאים רבים לאחר מכן. הספר פותח באקסיומות של הגיאומטריה כמו האקסיומה הטוענת שבין כל שתי נקודות עובר ישר, או האקסיומה האומרת שיש ישר אחד בלבד שעובר דרך נקודה ומקביל לישר אחר. אקסיומה זו הובילה לפיתוחה של הגיאומטריה האוקלידית, ורק במאה ה- 19 החלו להתפתח הגיאומטריות הלא אוקלידיות.
הספר "היסודות" מחולק כאמור ל- 13 ספרים. ספרים 1 עד 6 דנים בגיאומטריה של המישור. ספרים 7 עד 9 עוסקים בתורת המספרים, וכוללים את האלגוריתם של אוקלידס למציאת מחלק משותף מקסימלי של שני מספרים (ראו סעיף 3.4). ספר 10 עוסק במספרים אירציונאליים, וכולל בין היתר את ההוכחה לכך ש- $\sqrt{2}$ אינו רציונאלי (כפי שראינו במשפט 1.1.3). ואילו ספרים 11 עד 13 דנים בגיאומטריה תלת ממדית.

**משפחת ברנולי Bernoulli** נחשבת לאחת הדוגמאות המובהקות ביותר לכשרונות גאוניים העוברים במשפחה אחת. (הדוגמה המפורסמת ביותר היא זו של משפחת המוסיקאים באך). האי-שוויון שהוכחנו בסעיף 3.1 הוא של **יקוב ברנולי Jacob Bernoulli (שוויץ 1705-1654)** שתרם תרומות חשובות לחקר האנליזה (מושג האינטגרל), הגיאומטריה וההסתברות (חוק המספרים הגדולים. ראו סעיף 8.7). אחיו הצעיר **יוהאן ברנולי Johann Bernoulli (שוויץ 1748-1667)** שגם היה יריב מדעי חריף שלו, התבלט אף הוא בתחומי האנליזה והמכניקה. כמה מילדיו של יוהאן אף הם התבלטו, ובמיוחד **דניאל ברנולי Daniel Bernoulli (נולד בהולנד 1700, מת ב- שוויץ 1782)** שתרם תרומות חשובות להידרודינמיקה, ונאלץ לעמוד אף הוא בתחרות חריפה עם אביו.

**יוהאן קארל פרידריך גאוס Johann Carl Friedrich Gauss (גרמניה 1855-1777)**. גאוס נחשב על ידי רבים לגדול המתמטיקאים בכל הזמנים, וידוע בכינוי "נסיך המתמטיקאים". בהיותו בן שבע הוא הדהים את מורהו בבית הספר כאשר הבחין איך לסכם את המספרים מ- 1 עד 100 על ידי סידורם ב- 50 זוגות שכל אחד מהם מסתכם ל- 101 (כפי שראינו בסעיף 3.1). בנעוריו הוא גילה בכוחות עצמו עובדות מעמיקות כמו משפט הבינום של ניוטון (ראו סעיף 4.3), את משפט המספרים הראשוניים (ראו סעיף 7.5), ועוד.
התגלית החדשה הראשונה שלו נעשתה בהיותו בן 21 – הוא הוכיח שאי אפשר לבנות בעזרת סרגל ומחוגה את המצולע המשוכלל עם 17 צלעות. זו הייתה אחת התוצאות המשמעותיות הראשונות בגיאומטריה מישורית מאז ימי היוונים. בעבודת הדוקטורט שלו הוא הוכיח את המשפט היסודי של האלגברה.
גאוס תרם תרומות מכריעות לכל שטחי המתמטיקה: בתורת המספרים הוא הכניס למשל את מושג הקונגרואנציה – מודולו. הוא הוכיח משפטים יסודיים בגיאומטריה דיפרנציאלית, וכן הוכיח תוצאות בגיאומטריה לא-אוקלידית שאותן הוא העדיף לא לפרסם על מנת להימנע מעימותים. גאוס גילה גם עניין רב בפיזיקה ובאסטרונומיה והשפיע השפעה ניכרת על שטחים אלה. הוא גילה עניין בחישוב מעשי, הצטיין ביכולת חישובית נדירה ופיתח בין היתר לצרכים אלה את שיטת הריבועים הפחותים וכלים יסודיים בסטטיסטיקה (עקומת גאוס, ראו סעיף 8.7).