# 2. מבוא ללוגיקה מתמטית

בפרק זה נסקור את המונחים והסימנים הבסיסיים של הלוגיקה המתמטית. הלוגיקה החלה את דרכה כבר בימי הפילוסופים היוונים, ופותחה במטרה לנסח בצורה פורמלית את תורת הדדוקציה, כלומר כיצד ניתן להסיק מסקנות חדשות מכמה הנחות המקובלות על כולם כנכונות. הרטוריקה - אומנות הנאום - כללה את לימוד הלוגיקה שהגדירה כללים שעליהם הסתמכו כל הנואמים. כך למשל, מוכר ודאי לכולכם כלל הסילוגיזם או כלל ההיקש :

כל אדם הוא בן-תמותה.
<u>סוקרטס הוא אדם.</u>
מסקנה : סוקרטס הוא בן-תמותה.

בצורה פורמלית אפשר לנסח כלל זה כך :

כל A הוא B.
<u>C הוא A.</u>
מסקנה : C הוא B.

אולם השפה הטבעית אינה תמיד מדויקת, ולכן שימוש לא זהיר בכללי הלוגיקה עלול להוביל למסקנות מוטעות. כך למשל:

חלק מהאנשים יודעים לוגיקה.
<u>תושבי חצי הכדור הצפוני הם חלק מהאנשים.</u>
מסקנה: תושבי חצי הכדור הצפוני יודעים לוגיקה.

או אף להוביל למשפטים הסותרים את עצמם כגון : " המשפט הזה שקרי". משפט ידוע זה הקרוי גם **פרדוקס השקרן**, מופיע באחד מספרי חסמב"ה. הגיבור ירון זהבי מעומת שם עם שוביו המודיעים לו כי דינו נחרץ למוות. הם יתנו לו לומר רק משפט אחד אחרון. "אם תאמר דבר אמת", הם אומרים לו, "נתלה אותך. אך אם תאמר דבר שקר, נירה בך". ירון זהבי הפיקח ענה

"אתם תירו בי" והותיר את שוביו פעורי פה. וכך ניצל ירון זהבי ממוות (והתאפשרה כתיבתם של עוד כמה וכמה ספרים בסדרה חסמב"ה...).
במאה ה- 19 חזרה הלוגיקה להוות ענף מחקר פעיל שמטרתו הייתה להצדיק פורמלית את רעיון ההוכחה המתמטית, ולהבין לעומק את מושג הנכונות או התקפות הלוגית. גם כאן, אגב, שיחק פרדוקס השקרן תפקיד חשוב: איך ניתן לסווג את האמירה "המשפט הזה שקרי"? האם זו אמירה נכונה או שקרית? במסגרת המצומצמת שלנו לא נוכל לדון בעניינים אלה לעומק. בשלב זה של תולדות המתמטיקה, נעשו ההוכחות המתמטיות מסובכות יותר ויותר, והיו מתמטיקאים שפקפקו בתהליך הדדוקציה כולו. הלוגיקנים ניסו ליצור מערכת פורמלית שבה קבוצת המשפטים שאפשר להוכיח זהה בדיוק לקבוצת המשפטים הנכונים. כלומר:

אי-אפשר להוכיח משפטים לא נכונים.
אם משפט הוא נכון, אז קיימת הוכחה ורק צריך לגלותה.

בשיאה של ההתפתחות ההיסטורית הזו הציע המתמטיקאי דויד הילברט, שנחשב לגדול המתמטיקאים של זמנו, תוכנית נועזת. תוכנית הילברט הייתה לפתח מערכת לוגית שתאפשר לעשות זאת, ולגלות את כל המשפטים הנכונים במתמטיקה. במינוח של ימינו היינו אומרים שהוא רצה **למחשב** את תהליך ההוכחה המתמטית. תוכניתו מרחיקת הלכת של הילברט נופצה על ידי מתמטיקאי דגול אחר, קורט גדל. גדל הראה שיש משפטים נכונים במתמטיקה שאי-אפשר להוכיחם! אלה מבין הקוראים שילמדו לעומק לוגיקה או את תורת החישוביות, ילמדו על התפתחויות מרתקות אלה בקורסים המתאימים.
הלוגיקה חרגה בדורות האחרונים מהעיסוק ביסודות המתמטיקה והתברר שיש לה גם היבטים שימושיים בתחומים רבים, כמו תכנון שפות תכנות חדשות והוכחת נכונותן של תוכניות. בתחום הבינה המלאכותית אפשר לתת למחשב קבוצה של אקסיומות וכללי היסק ולבקש ממנו למצוא משפטים חדשים ולהוכיח אותם. רבים מהיישומים מסתמכים על לוגיקות לא סטנדרטיות, כמו לוגיקות לא בינאריות, לוגיקה טמפורלית (הכוללת גם היבט של זמן) וכדומה. אנו לא נעסוק כאן בתחומים אלה.

פרק זה מחולק לשני חלקים מרכזיים - תחשיב הפסוקים ותחשיב היחסים. הלוגיקה המתמטית עוסקת באופן בסיסי בחקר של ביטויים **בוליאניים**, כלומר ביטויים שיכולים לקבל רק שני ערכים. ערכים אלה נקראים לרוב **אמת ושקר** (True ו- False) בשל מקורם בפילוסופיה, אולם יכולים להיות גם 1 ו- 0 או כל שני ערכים אחרים. אבני הבניין יהיו ביטויים בוליאניים שייקראו פסוקים. כך למשל המשפטים "אחד ועוד אחד שווה שתיים" ו"כדור הארץ מסתובב סביב השמש" הם שני פסוקים נכונים, ואילו הפסוק "השמש מסתובבת סביב כדור הארץ" שקרי. בעזרת מילות קישור כגון - גם, או, גורר - נוכל לבנות פסוקים מורכבים יותר. מילות הקישור נקראות גם קַשָׁרִים לוגיים. כך למשל נוכל לבנות את הפסוק "אחד ועוד אחד שווה שתיים **וגם** כדור הארץ מסתובב סביב השמש". תחשיב הפסוקים עוסק אם כך בדרך שבה אפשר ליצור פסוקים חדשים בעזרת קשרים לוגיים.
תחשיב היחסים מאפשר ליצור פסוקים מורכבים יותר הכוללים גם את המילים "לכל" ו"קיים", כגון המשפט "כל מספר זוגי מתחלק ב- 2". הדבר נעשה על ידי הרחבת התחביר כך שניתן יהיה לכתוב משפטים הכוללים יחסים המוגדים על תחום כלשהו וערכם הוא שוב אמת או שקר.

ניתן לחלק כל מערכת לוגית לשלושה חלקים מרכזיים: **התחביר, הסמנטיקה ותורת ההיסק.** התחביר דן בדרך שבה ניתן לבנות ביטויים בשפה, וכיצד לפרק ביטוי מורכב למרכיביו. התחביר עוסק למעשה במניפולציה של סמלים בלבד. הסמנטיקה היא שמעניקה משמעות לסמלים, ויוצרת את הקשר בין השפה למשמעות שלה. כך למשל, המשפט "לכל מספר יש שורש ריבועי" אינו נכון אם נתבונן בעולם המספרים הממשיים, אולם הוא נכון בעולם המספרים המרוכבים. כלומר נכונותו של המשפט משתנה על פי המערכת שבה מדובר והמשמעות הסמנטית שניתנת לו במערכת זו. תורת ההיסק עוסקת במושג של הוכחה ומגדירה את האקסיומות והכללים המאפשרים לנו להסיק משפטים חדשים בעזרת כללים ומשפטים הידועים כנכונים. שפה פורמלית היא שפה שכוללת תחביר, סמנטיקה ותורת היסק. מטרה אופיינית בחקר מערכת לוגית כלשהי היא הניסיון לברר אם קבוצת המשפטים שניתן להוכיח במערכת זו זהה לקבוצת המשפטים הנכונים במערכת זו. אולם נושא זה חורג מהיקפו של ספר זה.

## 2.1. תחשיב הפסוקים

הנושאים שיוצגו: *פסוק, משתנה פסוקי, קבוע פסוקי, פסוקים אטומיים, השמה, קשרים לוגיים, טבלת אמת, שקילות לוגית, טאוטולוגיה, סתירה.*

נגדיר תחילה פורמלית את אבני הבניין של התחביר של תחשיב הפסוקים.

**הגדרה 2.1.1: פסוק** הוא כל משפט שהוא **אמיתי** או **שקרי** אך לא שניהם. הפסוק הבסיסי ביותר ייקרא **משתנה פסוקי**. משתנים פסוקיים יסומנו לרוב על ידי אות מהא"ב האנגלי. יש שני **קבועים פסוקיים** והם יסומנו על ידי T,F, כאשר T מסמן את הערך אמת ו- F את הערך שקר. משתנים פסוקיים וקבועים פסוקיים נקראים גם **פסוקים אטומיים** (כי אי-אפשר לחלק אותם לחלקים קטנים יותר). **פסוק מורכב** נוצר על ידי שילוב של פסוקים אטומיים **וקשרים לוגיים** שמחברים בין הפסוקים האטומיים.

**דוגמה 2.1.2:** המשפט "הוא אוכל" הוא פסוק אטומי. נסמן אותו על ידי P. המשפט "הוא שותה" גם הוא פסוק אטומי. נסמן אותו על ידי Q. לעומת זאת המשפט "הוא אוכל וגם שותה" אינו פסוק אטומי, כי אם פסוק מורכב. הוא נוצר על ידי שילוב הפסוקים P ו- Q בעזרת הקשר הלוגי "גם". אפשר גם ליצור את המשפט המורכב P או Q, כלומר "הוא אוכל או שותה", הפעם בעזרת הקשר הלוגי "או".

לפני שנסקור במפורט את הקשרים הלוגיים המקובלים, נגדיר כיצד מחליטים מתי פסוק הוא נכון.

**הגדרה 2.1.3:** פונקציה f שקובעת לכל משתנה פסוקי ערך T או F נקראת **השמה** (פירוש). נסמן את ערכו של פסוק A לפי ההשמה f על ידי $f(A)$. הערך $f(A)$ נקרא **ערך האמת** של A לפי f. השמה f **מספקת** פסוק A אם $f(A) = T$, ואינה מספקת את A אם $f(A) = F$. **טבלת אמת** מאפשרת לציין את ערכו של פסוק על פי כל ההשמות האפשריות.

שימו לב, השמה קובעת ערך למשתנים הפסוקיים, בדומה להשמות (הצבת ערך) בביטויים חשבוניים. כך למשל, אם נתבונן בביטוי החשבוני $E = a + 2b$, אז ערכו יהיה $E = 11$ בהשמה $a = 3, b = 4$, ואילו השמה אחרת תיתן ערך אחר ל- $E$. במקרה של פסוקים לוגיים, השמה יכולה לתת לכל משתנה פסוקי רק שני ערכים "אמת" או "שקר".

## הקשרים הלוגיים

אנו נבחן כאן רק את הקשרים הלוגיים השימושיים ונסתפק בקשרים לוגיים אונאריים (חד-מקומיים) ובינאריים (דו-מקומיים).

**קשר השלילה**: מסומן על ידי $\neg$ . זהו קשר חד-מקומי, שכן הוא פועל על פסוק אטומי אחד. במקרה זה הפסוק $P$ נכון אם ורק אם שלילתו שתסומן על ידי $\neg P$ אינה נכונה. הנה טבלת האמת שלו.

| **P** | **¬P** |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**דוגמה 2.1.4:** נתבונן בפסוק $P$ "השמש צהובה". שלילתו של הפסוק היא $\neg P$ "השמש אינה צהובה".

**הקשר "גם"**: מסומן על ידי $\wedge$. יהיו $P,Q$ שני פסוקים. הפסוק $P\wedge Q$ נכון אם ורק אם $P$ נכון וגם $Q$ נכון, כלומר שני הפסוקים נכונים. הנה טבלת האמת של הקשר "גם".

| **P** | **Q** | **P∧Q** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**דוגמה 2.1.5:** יהי $P$ הפסוק "הוא אוכל" ויהי $Q$ הפסוק "הוא שותה". הפסוק $P\wedge Q$ יהיה אם כן "הוא אוכל וגם שותה".

**הקשר "או":** מסומן על ידי $\vee$. יהיו $P,Q$ שני פסוקים. הפסוק $P\vee Q$ נכון אם ורק אם $P$ נכון או $Q$ נכון או שניהם נכונים, כלומר אם לפחות אחד מהפסוקים $P,Q$ נכון.

| **P** | **Q** | **P∨Q** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**דוגמה 2.1.6:** יהי P הפסוק "הארץ מסתובבת סביב השמש" ויהי Q הפסוק "$1+1 = 3$". הפסוק $P\vee Q$ יהיה "הארץ מסתובבת סביב השמש או $1+1 = 3$". שימו לב, שאם P אכן פסוק אמת ו- Q פסוק שקרי, הרי $P\vee Q$ פסוק אמת.

תלמידים מתחילים מתקשים לפעמים בהבנת הקשר "או". הסיבה לקושי נובעת מההבדל בשימוש במילה "או" בשפת הדיבור לעומת שימושה במתמטיקה. הנה דוגמאות "מהחיים".

**דוגמה 2.1.7:** כאשר נאמר בתפריט של מסעדה "בארוחה עסקית אפשר לאכול סלט או מרק", הכוונה בקשר "או" במשפט זה היא שאפשר לאכול סלט או מרק אך לא את שניהם. כך גם לרוב במשפט "נלך לסרט או לתיאטרון". הכוונה בשפת הדיבור היא שנלך לאחד משני המקומות אך לא לשניהם גם יחד, וזאת **בניגוד** למשמעות המתמטית.

יש גם קשר לוגי שמשמעותו דומה ל"או" בשפת הדיבור. זהו הקשר "**או אקסקלוסיבי**" המכונה גם XOR, ומסומן על ידי $\oplus$. טבלת האמת של קשר זה היא:

| **P** | **Q** | **$P\oplus Q$** |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**קשר הגרירה "אם-אז":** מסומן על ידי $\rightarrow$. יהיו $P,Q$ שני פסוקים. הפסוק $P\rightarrow Q$ אינו נכון אם ורק אם P נכון אך Q אינו נכון. בכל מקרה אחר $P\rightarrow Q$ מקבל ערך אמת.

| **P** | **Q** | **$P\rightarrow Q$** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

קשר הגרירה מעורר לפעמים קושי אצל תלמידים מתחילים. נתעכב על כך כדי ללבן את העניין.

**דוגמה 2.1.8:** אמא הלוגיקנית אמרה לבנה יוסי "אם תלמד אז תצליח במבחן". יוסי חזר הביתה בצהלה ואמר "אמא טעית! לא למדתי והצלחתי בבחינה". אמא ענתה "טעות בידיך. המשפט שאמרתי הוא נכון. נביט בטבלת האמת ונראה". ואכן,

| **יוסי למד** | **יוסי הצליח** | **תלמד $\rightarrow$ תצליח** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

"שים לב, יוסי", אמרה אמא. אנחנו נמצאים במצב המתאים לשורה השלישית בטבלה. לא למדת ("יוסי למד = F") והצלחת ("יוסי הצליח = T"). במצב עניינים כזה המשפט שלי "אם תלמד אז תצליח" הוא נכון, כפי שמראה הטבלה בשורה זו. ואכן, משפטה של אמא "אם תלמד אז תצליח" מתברר כמשפט שקרי אך ורק במקרה המתאים לשורה השניה בטבלה. דהיינו למקרה שבו יוסי לומד אך אינו מצליח.

הקושי שהערנו עליו נובע מהשימוש השונה במבנה התחבירי "אם... אז... " בשפת הדיבור ובהקשר המתמטי. אנו נחזור לעניין זה בהמשך.

**הקשר "אם ורק אם":** מסומן על ידי $\leftrightarrow$. יהיו $P,Q$ פסוקים. הפסוק $P\leftrightarrow Q$ נכון אם ורק אם ל- $P$ ול- $Q$ אותו ערך אמת. נהוג גם לקצר ולכתוב אם"ם במקום אם ורק אם.

| **P** | **Q** | **$P\leftrightarrow Q$** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

שימו לב, הפסוק $P\leftrightarrow Q$ נכון אם ורק אם הפסוק $P\rightarrow Q$ נכון וגם הפסוק $Q\rightarrow P$ נכון, ומכאן כמובן שמו של הקשר $\leftrightarrow$.

**דוגמה 2.1.9:** אבא הלוגיקן אומר לשולה הנמנמנית "את תתעוררי בבוקר אם ורק אם השעון המעורר יצלצל". זהו משפט אמת, שכן:

א) שולה נמנמנית ולא תתעורר ללא השכמה.

ב) השעון מצלצל בעוצמה כה רבה שאפילו שולה אינה יכולה להמשיך ולישון לנוכח צלצוליו.

**אתגר:** אנו הגדרנו רק חלק מהקשרים הלוגיים. כמה קשרים לוגיים אונאריים שונים אפשר להגדיר? כמה קשרים בינאריים שונים יש?

**הערה:** במובן מסוים, החומר הנדון כאן אינו אלא חזרה על דברים שכבר למדנו בתורת הקבוצות. שימו לב לאנלוגיה הניתנת בטבלת "התרגום" הבאה:

| **לוגיקה<br>פסוקים P,Q** | **תורת הקבוצות<br>קבוצות A,B** |
|---|---|
| או $P\vee Q$ | איחוד $A\cup B$ |
| וגם $P\wedge Q$ | חיתוך $A\cap B$ |
| שלילה $\neg P$ | משלים $A^C$ |
| אם"ם $P\leftrightarrow Q$ | שוויון $A = B$ |
| גרירה $P\rightarrow Q$ | הכלה $A\subseteq B$ |

האנלוגיה בטבלה לעיל נבנית כך. תהי U הקבוצה האוניברסלית שבתוכה אנו פועלים, יהיה x איבר כלשהו ב- U, ותהיינה A,B תת-קבוצות של U. אם P הוא הפסוק "x הוא איבר של A" ($x\in A$), ואילו Q הוא הפסוק "x הוא איבר של B" ($x\in B$), אזי $P\vee Q$ הוא בדיוק הפסוק "$x\in A\cup B$". בדומה, התנאי $A\subseteq B$ שקול ל- $P\rightarrow Q$ (בדקו!).

## סוגריים וסדר הקדימויות של הקשרים

כאמור, הקשרים הלוגיים מאפשרים לנו לבנות מפסוקים אטומיים פסוקים מורכבים יותר ויותר. השימוש בסוגריים מאפשר לפרק פסוק מורכב לחלקים קצרים וברורים יותר, בדומה לשימוש בסוגריים בביטויים חשבוניים. גם במקרה זה יש לחשב תחילה את ערכו של הביטוי שבתוך הסוגריים. בנוסף, יש סדר קדימויות המוגדר על הקשרים הלוגיים המאפשר לפענח את ערכו של פסוק מורכב בדרך יחידה (שוב בדומה לקדימויות של הפעולות החשבוניות). סדר הקדימויות הוא זה:

| |
|---|
| קשר השלילה $\neg$ |
| הקשר גם $\wedge$ |
| הקשר או $\vee$ |
| קשר הגרירה $\rightarrow$ |
| הקשר אם ורק אם $\leftrightarrow$ |

כמו-כן אם יש סדרה של קשרים זהים ברציפות יש לקרוא אותם משמאל לימין.

**דוגמה 2.1.10:** לפסוקים $a\vee b\vee c$ ו- $(a\vee b)\vee c$ יש ערך אמת זהה עבור כל השמה ל- a,b,c. ניתן לבדוק זאת על ידי כתיבת טבלת אמת לכל אחד מהפסוקים.
לעומת זאת טבלאות האמת של הפסוקים $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$ ו- $P\rightarrow(Q\leftrightarrow\neg(Q\rightarrow\neg P))$ שונות. במקרה זה מיקום הסוגריים שינה את משמעות הפסוק.

את הפסוק $\neg Q\rightarrow\neg P$ אפשר לכתוב עם סוגריים כך: $((\neg Q)\rightarrow(\neg P))$, וזאת מכיוון שהקדימות של קשר השלילה $\neg$ גבוהה מהקדימות של קשר הגרירה $\rightarrow$.
ואילו, הפסוק $P\vee Q\wedge R$ ייכתב עם סוגריים באופן הבא: $P\vee(Q\wedge R)$, מכיוון שהקדימות של $\wedge$ גבוהה מזו של $\vee$.

כעת אנו יכולים לחשב את טבלאות האמת של פסוקים מורכבים הכוללים כמה קשרים לוגיים.

**דוגמה 2.1.11:** נתבונן בפסוק המורכב $P\leftrightarrow(Q\wedge R)$ ונחשב את טבלת האמת שלו. ייתכנו 8 השמות שונות למשתנים $P,Q,R$ ולכן בטבלה יהיו 8 שורות. נחשב תחילה את ערכו של הביטוי $Q\wedge R$ שכן הוא נמצא בתוך הסוגריים. בהינתן ערכו של ביטוי זה נחשב את ערכו של הביטוי כולו.

| **P** | **Q** | **R** | **$Q\wedge R$** | **$P\leftrightarrow(Q\wedge R)$** |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | F |
| T | F | T | F | F |
| T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | F |
| F | T | F | F | T |
| F | F | T | F | T |
| F | F | F | F | T |

כפי שאפשר לראות תהליך חישוב טבלת אמת יכול להיות ארוך ומייגע. בהמשך נציג כללים המאפשרים לפשט תחילה את הביטוי ורק אז לחשב את ערכו. דבר זה יסייע לנו שכן נזדקק לעתים לחישוב טבלאות אמת המתאימות לפסוקים מורכבים.
לבעיות אלה יש חשיבות רבה בתכנון של מעגלים אלקטרוניים בסיסיים ביותר, ביניהם אלה שעליהם מושתתים כל המחשבים הפועלים כיום. בעיות אלה זוכות, לכן, לדיון מעמיק בתורת האלגוריתמים ובתורה של סיבוכיות החישוב.

## שקילות לוגית

**הגדרה 2.1.12:** יהיו $A,B$ שני פסוקים. אם $f(A) = f(B)$ עבור כל השמה $f$, אז נאמר שהפסוקים $A,B$ **שקולים לוגית**, ונסמן זאת על ידי $A \equiv B$.

כדי לבדוק האם שני פסוקים שקולים לוגית אפשר לחשב את טבלאות האמת של שני הפסוקים ולראות אם הן זהות.

**דוגמה 2.1.13:** בדוגמה הראשונה שנציג אנו חוזרים אל בירור המשמעות של קשר הגרירה. נראה ששני הפסוקים $P\rightarrow Q$ ו- $(\neg P\vee Q)$ שקולים לוגית. נחשב את טבלת האמת של הפסוק $(\neg P\vee Q)$.

| **P** | **Q** | **$\neg P$** | **$(\neg P\vee Q)$** |
|---|---|---|---|
| T | T | F | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

ואכן טבלה זו זהה לטבלת האמת של הפסוק $P\rightarrow Q$, ולכן הפסוקים שקולים לוגית. נוכיח כעת שגם שני הפסוקים $P\rightarrow Q$ ו- $(\neg Q\rightarrow\neg P)$ שקולים לוגית. נחשב את טבלת האמת של הפסוק $(\neg Q\rightarrow\neg P)$.

| P | Q | ¬P | ¬Q | (¬Q→¬P) |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | T | T |

שוב קיבלנו טבלת אמת זהה לטבלת האמת של הפסוק $P\rightarrow Q$, ולכן הפסוקים שקולים לוגית.

**תרגיל:** נסו והראו כי גם הפסוקים $P\rightarrow Q$ ו- $(P\wedge\neg Q)\rightarrow(R\wedge\neg R)$ שקולים לוגית. כך גם הפסוק $(P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg P$ שקול לוגית לפסוק $P\rightarrow Q$.

בפרקטיקה המתמטית, אנו משתמשים בזהויות האלה לעתים מזומנות. רוב המשפטים המתמטיים מנסים להסיק מתוך הנחה כלשהי P, מסקנה מבוקשת Q. היינו, להוכיח משפט מהצורה $P\rightarrow Q$. בפועל, לעתים קרובות מוכיחים את אחד הפסוקים השקולים $(\neg P\vee Q)$, $(\neg Q\rightarrow\neg P)$, $(P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg P$ או $(P\wedge\neg Q)\rightarrow(R\wedge\neg R)$. אנו נדון בכך בהרחבה בהמשך בסעיף 2.2.

כאמור, התהליך של חישוב טבלאות אמת יכול להיות מייגע ביותר כשמדובר בפסוקים ארוכים. ישנן זהויות לוגיות שמאפשרות לנו לפשט ביטוי ארוך ומסובך ולקבל ביטוי קצר יותר השקול לו לוגית. נפרט כאן ללא הוכחה מספר זהויות לוגיות מועילות. אתם מוזמנים להוכיח זהויות אלה על ידי כך שתבדקו את טבלאות האמת המתאימות.

| שם הזהות | הזהות הלוגית |
|---|---|
| טאוטולוגיה | $P\vee\neg P\equiv T$ |
| כלל הסתירה | $P\wedge\neg P\equiv F$ |
| כלל הזהות | $P\vee F\equiv P$<br>$P\wedge T\equiv P$ |
| חוק השליטה | $P\vee T\equiv T$<br>$P\wedge F\equiv F$ |
| | $P\vee(P\wedge Q)\equiv P$ |
| | $P\vee P\equiv P$<br>$P\wedge P\equiv P$ |
| שלילה כפולה | $\neg(\neg P)\equiv P$ |
| חוקי החילוף (קומוטטיביות) | $P\vee Q\equiv Q\vee P$<br>$P\wedge Q\equiv Q\wedge P$ |
| חוקי הקיבוץ (אסוציאטיביות) | $(P\vee Q)\vee R\equiv P\vee(Q\vee R)$<br>$(P\wedge Q)\wedge R\equiv P\wedge(Q\wedge R)$ |
| חוקי הפילוג (דיסטריביוטיביות) | $(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\equiv P\vee(Q\wedge R)$<br>$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)\equiv P\wedge(Q\vee R)$ |
| חוקי דה-מורגן | $\neg(P\vee Q)\equiv\neg P\wedge\neg Q$<br>$\neg(P\wedge Q)\equiv\neg P\vee\neg Q$ |

**דוגמה 2.1.14:** נחשב את שלילתו של הפסוק $P\rightarrow Q$. כפי שכבר ראינו (דוגמה 2.1.13), פסוק זה שקול לפסוק $(\neg P\vee Q)$. נשתמש כעת בחוקי דה-מורגן ונקבל:

$$\neg(P\rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P\vee Q) \equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \equiv (P\wedge\neg Q)$$

כאשר הזהות האחרונה נכונה לפי חוק השלילה הכפולה.

**דוגמה 2.1.15** נוכיח את השקילות $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q) \equiv Q$ בעזרת הזהויות הלוגיות שראינו זה עתה.

| **הזהות שבה השתמשנו** | **הפסוק השקול** |
|---|---|
| חוק הפילוג | $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)$ |
| $P\vee\neg P \equiv T$ | $(P\vee\neg P)\wedge Q$ |
| חוק הזהות | $T\wedge Q$ |
| | $Q$ |

**דוגמה 2.1.16:** נוכיח למשל את השקילות $P\vee(P\wedge Q) \equiv P$ בעזרת זהויות אחרות שרשומות בטבלת הזהויות. בדקו באיזה כלל השתמשנו בכל שלב.

$$P\vee(P\wedge Q) \equiv (P\wedge T)\vee(P\wedge Q) \equiv P\wedge(T\vee Q) \equiv P\wedge T \equiv P$$

## טאוטולוגיות וסתירות

**הגדרה 2.1.17:** פסוק $A$ נקרא **טאוטולוגיה** אם ערכו אמת בכל ההשמות, כלומר לכל השמה $f$ מתקיים $f(A) = T$. פסוק $A$ נקרא **סתירה** אם הוא שקרי בכל ההשמות, כלומר לכל השמה $f$ מתקיים $f(A) = F$.

כדי לבדוק שפסוק הוא טאוטולוגיה מספיק לרשום את טבלת האמת המתאימה, ולבדוק שערכו בכל השורות של הטבלה הוא T. בדומה כדי לבדוק שפסוק הוא סתירה, יש לוודא שבכל השורות של טבלת האמת שלו יש ערך F.

**דוגמה 2.1.18:** הפסוק $\neg(P\wedge Q)\vee Q$ הוא טאוטולוגיה. הנה טבלת האמת המתאימה לפסוק הזה. שימו לב שהעמודה הימנית ביותר של הטבלה היא כולה T.

| **P** | **Q** | $\neg(P\wedge Q)$ | $\neg(P\wedge Q)\vee Q$ |
|---|---|---|---|
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

**דוגמה 2.1.19:** הפסוק $(P\vee Q)\wedge\neg P\wedge\neg Q$ הוא סתירה. הפעם העמודה הימנית של טבלת האמת המתאימה היא כולה F.

| **P** | **Q** | **$(P\vee Q)$** | **$(P\vee Q)\wedge\neg P$** | **$(P\vee Q)\wedge\neg P\wedge\neg Q$** |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F |
| T | F | T | F | F |
| F | T | T | T | F |
| F | F | F | F | F |

דרך נוספת לוודא שפסוק הוא טאוטולוגיה היא להוכיח שהוא שקול לוגית לקבוע הפסוקי T. בדומה, כדי להוכיח שפסוק הוא סתירה די להוכיח שהוא שקול לקבוע הפסוקי F. נחזור לדוגמאות האחרונות, והפעם נשתמש בשיטה זו.

**דוגמה 2.1.20:** הטבלה הבאה מתארת את שרשרת הזהויות שבהן השתמשנו כדי להוכיח שהפסוק $\neg(P\wedge Q)\vee Q$ הוא טאוטולוגיה.

| **הזהות שבה השתמשנו** | **הפסוק השקול** |
|---|---|
| חוק דה-מורגן | $\neg(P\wedge Q)\vee Q$ |
| אסוציאטיביות | $(\neg P\vee\neg Q)\vee Q$ |
| $\neg Q\vee Q\equiv T$ | $\neg P\vee(\neg Q\vee Q)$ |
| חוק השליטה | $\neg P\vee T$ |
| | T |

קיבלנו בשורה האחרונה של הטבלה שהפסוק המקורי שלנו שקול ל- T ולכן הפסוק $\neg(P\wedge Q)\vee Q$ הוא טאוטולוגיה כנדרש.

**דוגמה 2.1.21:** נראה כעת שהפסוק $(P\vee Q)\wedge\neg P\wedge\neg Q$ שקול לוגית ל- F ולכן הוא סתירה.

| **הזהות שבה השתמשנו** | **הפסוק השקול** |
|---|---|
| חוק דה-מורגן | $(P\vee Q)\wedge\neg P\wedge\neg Q$ |
| $A\wedge\neg A\equiv F$ לכל A. | $(P\vee Q)\wedge\neg(P\vee Q)$ |
| | F |

**תרגילים**

1. ציינו אלו מהמשפטים הבאים הם פסוקים, ועבור כל פסוק ציינו האם הוא פסוק אטומי או מורכב. כתבו כל פסוק מורכב על ידי שימוש בפסוקים אטומיים וקשרים לוגיים.
   א. 8 ראשוני.
   ב. 8 אינו ראשוני.
   ג. האם זה נכון?
   ד. משה גבוה וכך גם יוסי.

ה. משה ויוסי גבוהים.
ו. המכונית שנסעה מהר הייתה ירוקה או כחולה.

2. פרקו את הפסוק "אם הרמזור אדום אז המכונית עוצרת" לפסוקים בסיסיים וכתבו את טבלת האמת של הפסוק.

3. הוסיפו סוגריים לפסוקים הבאים על פי כללי הקדימויות:
א. $P\wedge Q\wedge R\to P$.
ב. $P\wedge R\vee Q\leftrightarrow\neg R$.
ג. $\neg(P_1\wedge P_2)\to\neg Q\vee P_1$.
ד. $P\to Q\leftrightarrow\neg Q\to\neg P$.

4. קבעו לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים האם הוא טאוטולוגיה או סתירה או לא זה ולא זה.
א. $(P\to(P\to Q))\to Q$.
ב. $P\to((P\to Q)\to Q)$.
ג. $(P\wedge Q)\wedge(P\to\neg Q)$.
ד. $(P\to P)\to(Q\wedge\neg Q)$.

5. קבעו לגבי כל אחד מהביטויים הבאים האם הם אכן שקולים לוגית:
א. $P\to Q\equiv\neg Q\to\neg P$.
ב. $P\to Q\equiv\neg P\to\neg Q$.
ג. $P\equiv P\wedge(P\vee Q)$.

6. הקשר XOR חשוב במדעי המחשב בתחום של הצפנה, וזאת בגלל הזהות הבאה שהוא מקיים $(P\oplus Q)\oplus Q = P$. הוכיחו את הזהות הזאת על ידי כתיבת טבלת האמת המתאימה.

## 2.2. שימושים והרחבות של תחשיב הפסוקים

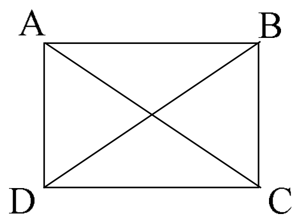
הנושאים שיוצגו: *הוכחות מתמטיות, תנאי הכרחי ומספיק, הוכחה בדרך השלילה, קבוצות שלמות של קשרים, הצורות הנורמליות CNF ו- DNF, מעגלים בוליאניים וחשמליים, שערים לוגיים, מעגל רוב.*

בסעיף זה נראה כמה שימושים של הלוגיקה המתמטית ושל תחשיב הפסוקים. נפתח אולי בשימוש החשוב ביותר, והוא תפקידה של הלוגיקה כשפה לניסוח משפטים והוכחות במתמטיקה.

### הלוגיקה כשפת המתמטיקה

יש סיבה טובה לכך שלוגיקה מתמטית נכללת בתוכנית הלימודים הבסיסית במתמטיקה: זוהי השפה שבה אנו מדברים על המתמטיקה כולה ובפרט על הוכחות. נתבונן במשפט הזכור לכם אולי מביה"ס.

**משפט:** במלבן $M = (A,B,C,D)$ האלכסונים חוצים זה את זה לשני חלקים שווים.

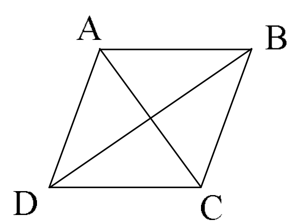



אין בכוונתנו לדון כאן בהוכחת המשפט ואף לא במונחים הגיאומטריים הנדונים כאן (שאותם, אנו מקווים, אתם זוכרים מלימודיכם בביה״ס). עניינו כאן הוא במבנה הלוגי של המשפט. נגדיר את P בתור הפסוק ״המרובע M הוא מלבן״. הפסוק Q הוא ״האלכסונים ב- M חוצים זה את זה לשני חלקים שווים״. המשפט שלנו אומר, אם כן, שהפסוק P גורר את הפסוק Q. דהיינו, $P \rightarrow Q$. זהו אופיים הכללי של משפטים מתמטיים. אנו אומרים גם שהפסוק P הוא **תנאי מספיק** לפסוק Q. למען הסר ספק, המצב אינו סימטרי: Q אינו תנאי מספיק ל- P, וזה מפני שניתן לבנות מרובעים שאינם מלבנים אבל אלכסוניהם חוצים זה את זה, למשל, מקבילית.

עוד מונח מקובל בדיון על הוכחות הוא זה: על משפט שצורתו $P \rightarrow Q$ אנו אומרים שמוכח בו כי הפסוק Q הוא **תנאי הכרחי** לפסוק P. שם זה מתאים לאינטואיציה שלא ייתכן ש- P יתקיים אלא אם כן Q מתקיים. מינוח זה מתיישב היטב גם עם הדיון הקודם שלנו על משמעותו של קשר הגרירה.

משפט אחר מתחום הגיאומטריה הוא:

**משפט:** המרובע $M = (A,B,C,D)$ הוא מקבילית אם ורק אם האלכסונים ב- M חוצים זה את זה לשני חלקים שווים.




במשפט זה יש לנו שוב שני פסוקים. הפסוק P הוא ״המרובע M הוא מקבילית״ והפסוק Q הוא ״האלכסונים ב- M חוצים זה את זה לשני חלקים שווים״. כאן המשפט עצמו אומר $P \leftrightarrow Q$. אנו נאמר שמדובר במשפט **שקילות** או שהפסוק P מתקיים **אם ורק אם** הפסוק Q מתקיים. משפטי שקילות נקראים גם משפטים של **תנאי הכרחי ומספיק**. כך למשל, ננסח לעתים קרובות את המשפט הנ״ל באופן הבא:

תנאי הכרחי ומספיק לכך שהאלכסונים במרובע M חוצים זה את זה הוא ש- M מקבילית.

ואפשר גם לנסח זאת כך:

התנאים הבאים שקולים:
1. המרובע M הוא מקבילית.
2. האלכסונים במרובע M חוצים זה את זה.

בהקשר זה כדאי להזכיר את אמרתו המפורסמת של הפילוסוף והמתמטיקאי רנה דקרט. הוא אמר "אני חושב ולכן אני קיים", ובשפת המקור, לטינית: "Cogito, ergo sum". בדיחה ידועה של מתמטיקאים אומרת שזהו תנאי מספיק אך לא הכרחי (והמבין יבין...).
והנה עוד בדיחה בהקשר זה: דקרט יושב בבית קפה. המלצר ניגש ושואל: "אדוני, אתה רוצה קפה?". דקרט עונה: "אני לא חושב", ו...פוף, נעלם.

## הוכחת משפטים

כפי שהסברנו, משפטים מתמטיים מביעים כרגיל בצורתם הפורמלית, תנאי גרירה מהצורה $P\rightarrow Q$. כגון המשפט שראינו: "M הוא מלבן" גורר "האלכסונים ב- M חוצים זה את זה לשני חלקים שווים". במקרה זה P נקרא **ההנחה** או הנתון של המשפט, ואילו Q נקרא **המסקנה** של המשפט. מטרת המשפט המתמטי היא להוכיח שאם ההנחה P מתקיימת אז המסקנה של המשפט Q נכונה. כלומר מוכיחים ש- $P\rightarrow Q$ נכון. יש כמה דרכים מרכזיות להוכיח משפט מהצורה $P\rightarrow Q$.
אפשר כמובן להוכיח את המשפט $P\rightarrow Q$ **ישירות**. כלומר, מניחים שהנתון P מתקיים, ובעזרתו ותוך שימוש במשפטים אחרים במתמטיקה הידועים כבר כנכונים מוכיחים שגם המסקנה Q נכונה. הנה דוגמה להוכחה בשיטה הישירה.

**דוגמה 2.2.1:** יהיו x,y שני מספרים טבעיים. נוכיח שאם x ו- y שניהם מספרים זוגיים אז $x + y$ זוגי. כאן P הוא הפסוק "x ו- y שניהם מספרים זוגיים" ואילו Q הוא הפסוק "$x + y$ זוגי", וברצוננו להוכיח את נכונות הפסוק $P\rightarrow Q$.
**הוכחה**: נתון לנו ש- x,y מספרים אי-זוגיים. לכן קיימים מספרים טבעיים a,b כך ש- $x = 2\cdot a$ ו- $y = 2\cdot b$. נחבר כעת את המספרים ונקבל:

$$x + y = 2\cdot a + 2\cdot b = 2(a + b).$$

ולכן גם $x + y$ מספר זוגי. □

לעתים נוח להוכיח משפט מהצורה $P\rightarrow Q$ בדרך לא ישירה באחת מהשיטות הבאות:

1. **צורת ה- Contra-positive**: מוכיחים את הפסוק $\neg Q\rightarrow\neg P$. כפי שראינו הפסוקים $P\rightarrow Q$ ו- $\neg Q\rightarrow\neg P$ שקולים לוגית (ראו דוגמה 2.1.13), ולכן מספיק להוכיח ש- $\neg Q\rightarrow\neg P$ נכון.
2. **הוכחה בדרך השלילה**: מוכיחים את הפסוק $(P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg P$. גם פסוק זה שקול לוגית לפסוק $P\rightarrow Q$ (בדקו). כדי להוכיח את נכונותו של הפסוק $P\rightarrow Q$, מניחים שהנתון P מתקיים **ומניחים בשלילה** שהמסקנה Q אינה מתקיימת, כלומר מניחים שהפסוק $P\wedge\neg Q$ נכון. כעת מנסים להוכיח שאז בהכרח ההנחה P אינה נכונה, כלומר הפסוק $\neg P$ נכון. זה כמובן מהווה **סתירה** להנחה הראשונית שההנחה P הייתה נכונה.

לעתים משתמשים בזהות הלוגית $P\to Q \equiv (P\wedge\neg Q)\to(R\wedge\neg R)$, כאשר R פסוק כלשהו אחר. במקרה זה מראים שמתוך ההנחה P ושלילת המסקנה $\neg Q$, אפשר להגיע לסתירה מהצורה $(R\wedge\neg R)$, וזאת מכיוון שהפסוק $(R\wedge\neg R)$ שקול לוגית ל- F. כאן הסתירה לא תהיה של ההנחה P, אלא של עובדה אחרת הידועה כנכונה. דהיינו, אם יודעים שהטענה R נכונה, וניתן להוכיח גם את שלילתה $\neg R$, מקבלים את הסתירה הדרושה.

**דוגמה 2.2.2:** יהיו n,m שני מספרים טבעיים. נוכיח שאם $n\cdot m$ הוא מספר אי-זוגי, אז n ו- m שניהם מספרים אי-זוגיים. כאן P הוא הפסוק "$n\cdot m$ הוא מספר אי-זוגי" ואילו Q הוא הפסוק "n ו- m שניהם מספרים אי-זוגיים". נוכיח את נכונות הפסוק $P\to Q$ בשיטת ה- Contra-positive.
**הוכחה:** נניח כי $\neg Q$ נכון, כלומר n,m אינם שניהם מספרים אי-זוגיים. פירוש הדבר הוא שלפחות אחד מהמספרים n,m הוא מספר זוגי. במקרה כזה המכפלה $n\cdot m$ היא כמובן זוגית. כלומר, הפסוק $\neg P$ נכון. הראינו ש- $\neg Q\to\neg P$ נכון, ולכן גם $P\to Q$ נכון. □

**דוגמה 2.2.3:** יהיו x,y שני מספרים ממשיים. נוכיח שאם $x > y$ ו- $x^2 < y^2$ אז $y < 0$. במקרה זה P הוא הפסוק "$x > y$ וגם $x^2 < y^2$", ו- Q הוא הפסוק "$y < 0$". נוכיח את המשפט בדרך השלילה.
**הוכחה:** נניח ש- $x > y$ ו- $x^2 < y^2$, ונניח בשלילה ש- $y \geq 0$. לכן, $x > y \geq 0$. כלומר, x ו- y שניהם מספרים אי-שליליים ולכן $x^2 > y^2$. אולם זו סתירה להנחתנו כי $x^2 < y^2$. □

## קבוצות שלמות של קשרים

ראינו מבחר רב של קשרים לוגיים, אולם למעשה אפשר להסתפק במספר מצומצם יחסית של קשרים ולכתוב בעזרתם כל פסוק, למשל קבוצת הקשרים $\{\wedge,\vee,\neg\}$. בהמשך נראה שאפשר להסתפק אפילו בפחות מזה.

**הגדרה 2.2.4:** קבוצת קשרים S תיקרא **שלמה** אם אפשר לכתוב לכל פסוק Q פסוק השקול ל- Q לוגית רק בעזרת הקשרים בקבוצה S.

**משפט 2.2.5:** קבוצת הקשרים $\{\wedge,\vee,\neg\}$ שלמה. דהיינו ניתן לבטא כל פסוק באמצעות קשרים אלה ובעזרתם בלבד.

אנו לא נוכיח משפט זה ישירות אלא נוכיח שני משפטים חזקים יותר. יש שתי צורות כתיבה סטנדרטיות המאפשרות למצוא לכל פסוק, פסוק אחר השקול לו לוגית וכתוב כך. צורות אלה נקראות גם **צורות נורמליות** של הפסוק.

**הגדרה 2.2.6:** נאמר שפסוק כתוב בצורת **CNF** (Conjunctive Normal Form) אם הוא כתוב בצורה $C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_k$, כאשר כל $C_i$ הוא פסוק מהצורה $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{t_i}$ וכל $A_j$ הוא משתנה פסוקי או שלילתו של משתנה פסוקי כלשהו. כל אחד מה- $C_i$ נקרא **פסוקית** (Clause).

**הגדרה 2.2.7:** נאמר שפסוק כתוב בצורת **DNF** (Disjunctive Normal Form) אם הוא כתוב בצורה $D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_k$, כאשר כל גורם $D_i$ הוא מהצורה $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{t_i}$ וכל $A_j$ הוא משתנה פסוקי או שלילתו של משתנה פסוקי כלשהו. כל אחד מה- $D_i$ נקרא **גורם** (Term).

נסכם: פסוק הוא בצורת CNF אם הוא "וגם של או – ים". לעומת זאת, פסוק הוא בצורת DNF אם הוא "או של גם – ים". שימו לב, מספר המשתנים בכל סוגריים אינו חייב להיות שווה.

**דוגמה 2.2.8:** הפסוק $(P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_4)$ הוא בצורת CNF, ואילו הפסוק $(P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_4) \vee (P_2 \wedge P_4)$ הוא בצורת DNF.

אנו נוכיח שכל פסוק ניתן לרשום בצורת CNF, וכל פסוק ניתן לרשום בצורת DNF. ובאופן פורמלי: לכל פסוק יש פסוק השקול לו לוגית שיש לו צורת CNF. כמו-כן, יש לו גם פסוק השקול לו לוגית בצורת DNF. הבהירו לעצמכם שמשפט 2.2.5 נובע מכך. בטרם ניגש להוכחת טענות אלה, נעיר שקל למצוא את צורת ה- CNF של פסוק הבנוי מהקשרים $\{\neg, \wedge, \vee\}$ בלבד, וזאת באמצעות האלגוריתם הבא. "נכניס" את השלילות פנימה על ידי שימוש חוזר בכללי דה-מורגן, ונסיר שלילות כפולות על ידי שימוש בכלל השלילה הכפולה. ברגע שמגיעים לביטוי שבו כל השלילות "צמודות" למשתנים פסוקיים, יש להשתמש בחוקי הפילוג שוב ושוב.

**דוגמה 2.2.9:** נראה כיצד למצוא את צורת CNF של הפסוק $\neg((P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$. התהליך מתואר בטבלה הבאה.

| הכלל שהשתמשנו בו | הפסוק השקול |
|---|---|
| דה-מורגן | $\neg((P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$ |
| שלילה כפולה | $\neg(P \vee \neg Q) \vee \neg\neg R$ |
| דה-מורגן | $\neg(P \vee \neg Q) \vee R$ |
| שלילה כפולה | $(\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee R$ |
| חוק הפילוג | $(\neg P \wedge Q) \vee R$ |
| | $(\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ |

והפסוק האחרון שקיבלנו בטבלה הוא אכן בצורת CNF.

**משפט 2.2.10:** כל טבלת אמת ניתן לבטא על ידי פסוק בצורת DNF.

לא ניתן הוכחה פורמלית למשפט אלא נסתפק בהסבר כללי ובדוגמה. ההוכחה המלאה מצריכה רק רישום מפורט וזהיר יותר של הנאמר כאן. נניח אם כן שנתונה לנו טבלת אמת של פסוק, ונחפש פסוק בצורת DNF שטבלת האמת הנתונה היא הטבלה שלו. כדי לעשות זאת נתאים לכל שורה בטבלת האמת שערכה הוא T, פסוק שערכו יהיה T אך ורק עבור ההשמה שבאותה שורה. כל פסוק כזה יהיה בנוי רק ממשתנים פסוקיים או משלילתם שמחוברים על ידי הקשר "גם", וכל משתנה פסוקי בטבלת האמת יופיע בדיוק פעם אחת בפסוק הזה. בסיום נחבר את כל הפסוקים האלה על ידי הקשר "או".

**דוגמה 2.2.11:** נתבונן בטבלת האמת הבאה.

| P | Q | R | ערך |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | F |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |
| F | F | F | F |

השורות שבהן יש לפסוק ערך T הן שורות 1,3,7. התת-פסוק המתאים לשורה 1 הוא $(P\wedge Q\wedge R)$ מכיוון שרק עבור ההשמה $P = T,\ Q = T,\ R = T$ ערכו של התת-פסוק יהיה T. בדומה מתאימים תת-פסוקים לשורות 3 ו- 7. הפסוק בצורת DNF המתאים לכל הטבלה יהיה לכן:

$$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R).$$

האם גם לפסוקים בצורת CNF יש כוח ביטוי דומה? התשובה חיובית.

**משפט 2.2.12:** כל טבלת אמת ניתן לבטא על ידי פסוק בצורת CNF.

הוכחת המשפט נובעת כמסקנה ממשפט 2.2.10 ביחד עם שימוש בכללי דה-מורגן. העובדה הבסיסית היא שכאשר שוללים פסוק בצורת DNF תוך שימוש בכללי דה-מורגן, מתקבל פסוק בצורת CNF. ולהיפך – שלילה של פסוק בצורת CNF, תוך שימוש בכללי דה-מורגן, נותנת פסוק בצורת DNF. נשוב ונתבונן בטבלת האמת שבדוגמה האחרונה.

**דוגמה 2.2.13:** על מנת להציג את הטבלה שבדוגמה 2.2.11 בצורת CNF נפעל באופן הבא. ראשית, נרשום את הטבלה שהיא **השלילה** של הטבלה הנתונה. נקבל את הטבלה הבאה:

| P | Q | R | ערך |
|---|---|---|---|
| T | T | T | F |
| T | T | F | T |
| T | F | T | F |
| T | F | F | T |
| F | T | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | F |
| F | F | F | T |

נציג את הפסוק המתאים לטבלה שקיבלנו בצורת DNF:

$$(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$$

כעת נשלול את הפסוק שקיבלנו תוך שימוש בכללי דה-מורגן:

$$\neg[(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)] \equiv$$
$$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$$

קיבלנו פסוק המתאים לטבלה המקורית, הפעם בצורת CNF כנדרש.

כאמור, אפשר להסתפק גם בפחות משלושה הקשרים $\{\neg,\vee,\wedge\}$ הנדרשים בצורות CNF ו- DNF, כפי שמראה המשפט הבא.

**משפט 2.2.14:** הקבוצות הבאות של קשרים לוגיים הן קבוצות קשרים שלמות:
1. $\{\neg, \vee\}$
2. $\{\neg, \wedge\}$
3. $\{\neg, \rightarrow\}$

**הוכחה:** נוכיח למשל את סעיף 1. הוכחת יתר הסעיפים דומה. לאור המשפטים על הצורות הנורמליות CNF, DNF, די להראות שאפשר לבטא בעזרת הקשרים $\{\neg,\vee\}$ את הקשר $\wedge$. ואכן, אפשר לוותר על הקשר $\wedge$ כי לפי כלל דה-מורגן מתקיים $A\wedge B \equiv \neg(\neg A\vee\neg B)$ . לכן, נוכל להחליף כל תת-פסוק המכיל את הקשר $\wedge$ בתת-פסוק המכיל את הקשרים $\neg,\vee$ בלבד, וכך לקבל בסופו של דבר פסוק השקול לוגית לפסוק המקורי ומכיל רק את הקשרים $\{\neg,\vee\}$. □

משפטים 2.2.10 ו- 2.2.12 אומרים שצורות הייצוג CNF ו- DNF הן אוניברסליות, דהיינו, ניתן לייצג בעזרתן כל פסוק. זו תוצאה חשובה אך היא מתעלמת משאלה חיונית מן ההיבט החישובי: מהו אורכו של הייצוג הזה, כלומר, כמה ארוך הפסוק? לא נוכל להיכנס כאן לעומקם של הדברים האלה, הנדונים בהרחבה בקורסים בסיבוכיות של החישוב, אך נדגים אותם על מנת לעורר את עניינכם בנושא. לא קשה לשער את ההשלכות שיש לשיקולים אלה על בעיות בסיבוכיות החישוב.

**דוגמה 2.2.15:** נתבונן בטבלת אמת המוגדרת על ארבעה משתנים $P_1,P_2,P_3,P_4$, כאשר ערך האמת של הפסוק הוא T אם ורק אם הערך של כל ארבעת המשתנים שווה, כלומר אם $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = T$ או $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = F$. צורת ה- DNF של טבלה זו תהיה לכן,

$$(P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge P_4)\vee (\neg P_1\wedge\neg P_2\wedge\neg P_3\wedge\neg P_4)$$

ואילו צורת ה- CNF תהיה:

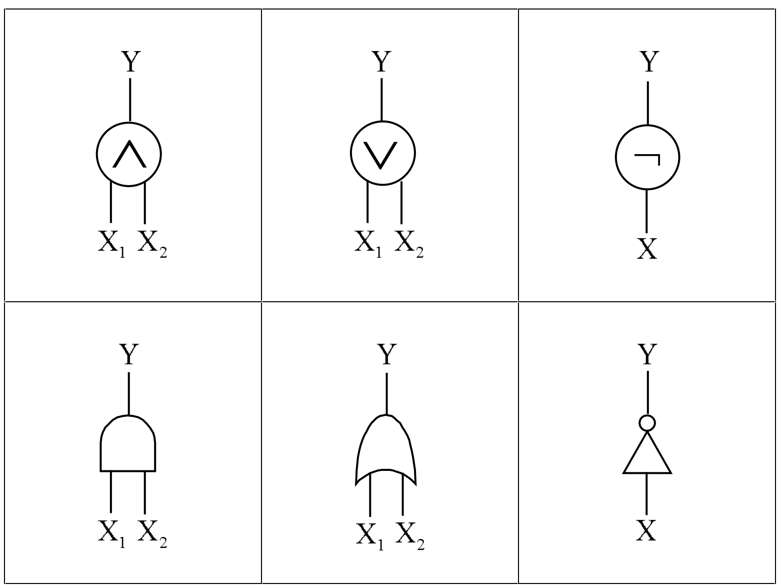
$$(P_1\vee P_2\vee P_3\vee\neg P_4) \wedge (P_1\vee P_2\vee\neg P_3\vee P_4) \wedge (P_1\vee P_2\vee\neg P_3\vee\neg P_4) \wedge$$
$$(P_1\vee\neg P_2\vee P_3\vee P_4) \wedge (P_1\vee\neg P_2\vee P_3\vee\neg P_4) \wedge (P_1\vee\neg P_2\vee\neg P_3\vee P_4) \wedge$$
$$(P_1\vee\neg P_2\vee\neg P_3\vee\neg P_4) \wedge (\neg P_1\vee P_2\vee P_3\vee P_4) \wedge (\neg P_1\vee P_2\vee P_3\vee\neg P_4) \wedge$$
$$(\neg P_1\vee P_2\vee\neg P_3\vee P_4) \wedge (\neg P_1\vee P_2\vee\neg P_3\vee\neg P_4) \wedge (\neg P_1\vee\neg P_2\vee P_3\vee P_4) \wedge$$
$$(\neg P_1\vee\neg P_2\vee P_3\vee\neg P_4) \wedge (\neg P_1\vee\neg P_2\vee\neg P_3\vee P_4)$$

הפסוק הראשון כולל שני גורמים ואילו הפסוק השני כולל 14 גורמים! אפשר להרחיב דוגמה זו בקלות לטבלת אמת של n משתנים שבה שוב ערך הפסוק הוא T אם ורק אם הערך של כל n המשתנים שווה. במקרה זה בצורת ה- DNF יהיו 2 גורמים, ואילו בצורת ה- CNF יהיו $2^n-2$ סוגריים.

## מעגלים בוליאניים

כאמור ללוגיקה שימושים רבים, בין היתר בתחום של **מעגלים בוליאניים** או **מעגלים לוגיים**. מעגל בוליאני בנוי מיחידות בסיסיות הנקראות **שערים לוגיים** המחוברים ביניהם בדרך כלשהי. שער לוגי הוא יחידה המקבלת מספר מסוים של קלטים אשר יכולים לקבל את הערכים 0 או 1 (T או F), ויש לו פלט אשר ערכו נקבע על ידי המעגל כפונקציה של הקלטים שהוזנו למעגל.

מכיוון שהראינו שקבוצת הקשרים $\{\wedge, \vee, \neg\}$ שלמה, נסתפק בשלושה סוגים של שערים בלבד, אשר ייצגו את שלושת הקשרים הנ"ל. **שער OR** מקבל שני קלטים $X_1,X_2$ והפלט שלו הוא $Y = X_1 \vee X_2$. בדומה **שער AND** מקבל שני קלטים $X_1,X_2$ והפלט שלו הוא $Y = X_1 \wedge X_2$. ואילו **שער NOT** מקבל רק קלט אחד X והפלט שלו הוא $Y = \neg X$. בתרשים 2.2.1 אפשר לראות שרטוט של שלושת השערים הלוגיים האלה, כאשר כל שער מופיע בשתי צורות: ציור סכמטי של השער בעזרת הקשרים הלוגיים שהכרנו עד כה, וציור המקובל יותר בתחום של מעגלים לוגיים. צורת הרישום שבשורה העליונה של התרשים מקובלת בתיאוריה של מדעי המחשב, ואילו הרישום בשורה התחתונה מקובל בהנדסת חשמל.




**תרשים 2.2.1: מימין שער NOT, באמצע שער OR, ומשמאל שער AND.**

כעת כדי לבנות מעגל לוגי מורכב יותר, נחבר כמה שערים לוגיים זה לזה, כאשר הפלט של מעגל לוגי אחד מוזן כקלט למעגל לוגי אחר. הנה דוגמה לבניית מעגל כזה.

**דוגמה 2.2.16:** בארה"ב נערכו בחירות בין בוש לגור. נניח שהצבעה לבוש תסומן ב- T והצבעה לגור תסומן ב- F. ברצוננו לתכנן מעגל אשר יקבל בתור קלט את ההצבעה של כל n אזרחי ארה"ב, ויוציא כפלט ערך T אם בוש ניצח וערך F אחרת. לשם פשטות נניח גם שמספר המצביעים n הוא אי-זוגי, כדי שבוודאות תהיה הכרעה בבחירות.
כדי להבין כיצד עלינו לתכנן את המעגל נפתח במקרה הפשוט שבו $n = 3$, כלומר יש רק שלושה מצביעים. יהיו $X_1,X_2,X_3$ תוצאות ההצבעה של שלושת המצביעים. הנה טבלת האמת המתארת את תוצאות ההצבעה ואת הפלט שהמעגל צריך לתת בכל מקרה.

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | **ערך** |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | T | F | F |
| F | F | T | F |
| F | F | F | F |

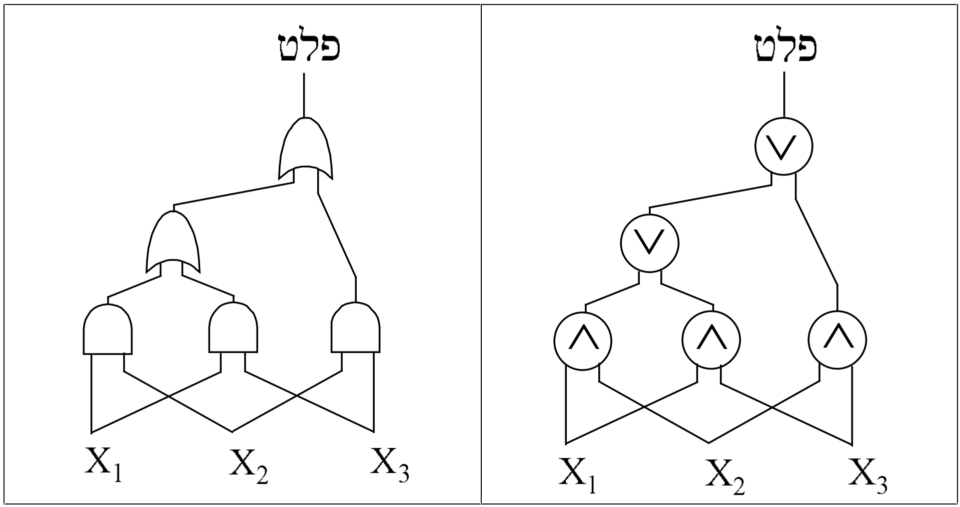
נכתוב תחילה נוסחה בצורת DNF עבור טבלת האמת הנתונה. הנוסחה המתאימה היא:

$$(X_1\wedge X_2\wedge X_3) \vee (X_1\wedge X_2\wedge\neg X_3) \vee (X_1\wedge\neg X_2\wedge X_3) \vee (\neg X_1\wedge X_2\wedge X_3).$$

נפשט את הנוסחה ונקבל (בדקו באילו חוקים השתמשנו):

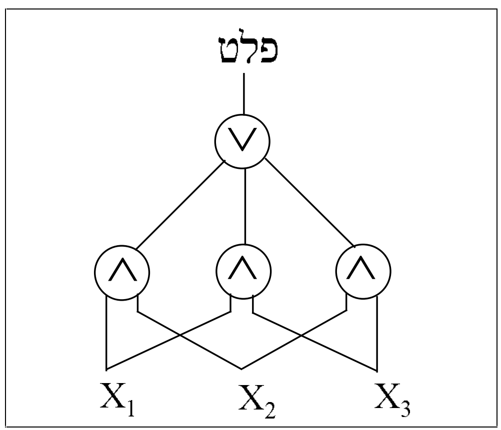
$$(X_1\wedge X_2) \vee (X_1\wedge X_3) \vee (X_2\wedge X_3).$$

שימו לב שהפסוק שקיבלנו מקבל ערך T אם ורק אם ערכם של לפחות שניים מהמשתנים $X_1,X_2,X_3$ הוא T, כלומר יש רוב למצביעים לבוש. המעגל המבוקש, הנקרא מעגל **הרוב**, מצויר בתרשים 2.2.2. נסו כעת לשרטט את מעגל הרוב המתאים ל- $n = 5$.




**תרשים 2.2.2: מעגל רוב ל- $n = 3$ בשתי צורות שרטוט.**

לפעמים מאפשרים לשערים הלוגיים לקבל יותר מאשר שני קלטים. כך למשל, אם נאפשר לשער ה- $\vee$ לקבל שלושה קלטים, אז מעגל הרוב ל- $n = 3$ ייראה כמו בתרשים 2.2.3.




**תרשים 2.2.3: מעגל רוב ל- $n = 3$.**

תחום חשוב במדעי המחשב עוסק בשאלות הקשורות במציאת חסמים עליונים ותחתונים לגודל הנדרש ממעגל בוליאני שאמור לחשב פונקציה מסוימת, כאשר **גודל המעגל** הוא מספר השערים הלוגיים המרכיבים אותו. בעיה נוספת הנחקרת היא **עומק המעגל** שהוא מספר השערים המקסימלי לאורך מסלול כלשהו מהקלטים של המעגל אל פלט המעגל. נושאים אלה הם מעבר להיקפו של הספר.

**תרגילים**

1. הוכיחו שהקבוצה $\{\neg,\rightarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה. כדי לעשות זאת, הראו שאפשר לבטא את הקשרים $\wedge,\vee$ אך ורק בעזרת הקשרים שבקבוצה $\{\neg,\rightarrow\}$.

2. שש עשרה מנורות מסודרות במעגל. בדקה ה- 0 מספר מנורות (ייתכן שאפס) דולקות והאחרות (ייתכן שאפס) כבויות. בכל דקה משתנה מצב המנורות על פי הכלל הבא: "מנורה דולקת בדקה ה- n+1 אם ורק אם בדקה ה- n היו שתי המנורות השכנות לה מימין ומשמאל דולקות או ששתי שכנותיה היו כבויות". הוכיחו שבדקה השמינית כל המנורות דולקות, בלי קשר למצבן ההתחלתי.

   **הדרכה:** תארו את מצב המנורה ה- i בדקה ה- n על ידי משתנה פסוקי $P_i^n$, ונסחו את כלל ההפעלה של המנורה ה- i בעזרת הקשר $\leftrightarrow$.

3. בבית הסוהר יושבים שלושה אסירים: פיקח, שתום עין ועיוור. מציעים להם את העסקה הבאה: בקופסה יש 2 כובעים אדומים ו- 3 כובעים לבנים. כל אחד מהם יחבוש כובע מתוך הקופסה מבלי שיידע את צבעו, אך הוא יוכל לראות את צבעי הכובעים של חבריו. לאחר מכן יישאל כל אחד מהם לפי הסדר מה צבע כובעו. הראשון שיידע – ישוחרר. הפיקח הודה שאינו יודע מה צבע כובעו. לאחריו אמר גם שתום העין שאינו יודע מה צבע כובעו. בשלב זה הכריז העיוור שהוא יודע מה צבע כובעו. מצאו את צבע הכובע של העיוור. **הדרכה:** תארו את המצב על ידי פסוקים בעזרת הפסוקים האטומיים הבאים: $P_i$ – אסיר i יודע את צבע כובעו. $Q_i$ – לאסיר i כובע בצבע לבן, וזאת עבור $i = 1,2,3$. פשטו את הפסוקים שקיבלתם ומצאו על ידי כך את צבע כובעו של העיוור.

4. זוהי חידה עתיקה: על אם הדרך יושבים שני אנשים. ידוע שאחד מהם תמיד אומר אמת והשני תמיד משקר, אך לא ידוע לכם מיהו מי. אחת הדרכים מוליכה לעיר א', שאליה אתם רוצים להגיע, והאחרת לעיר ב'. מותר לכם להציג שאלה אחת לאחד מהם לפי בחירתכם, ואז עליכם לדעת לאיזו דרך לפנות. מה תעשו?

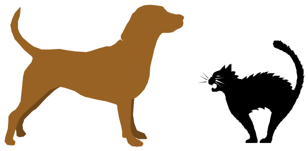
## 2.3. תחשיב היחסים

הנושאים שיוצגו: *יחס n - מקומי, הכמתים הלוגיים, שקילויות לוגיות.*

ביסודה של הלוגיקה המתמטית פועלים שני כוחות סותרים: מחד גיסא אנו מנסים לבנות מערכות לשוניות עתירות הבעה. מאידך גיסא חשוב לנו שנוכל לבדוק באופן יעיל את נכונותן של הטענות בשפה. ככלל ניתן לומר שככל שגדל כוח הביטוי של מערכת לוגית, כך קשה יותר להכריע בדבר תקפותן של טענות בשפה המתאימה.

פסוקים בתחשיב הפסוקים שבהם טיפלנו בסעיפים הקודמים הם דלי ביטוי אך נוחים לאימות. טבלאות אמת מספקות לנו כלי מכני שבעזרתו ניתן לברר אילו פסוקים הם סתירות, טאוטולוגיות וכדומה. אולם, השפה המוגדרת על ידי פסוקים בתחשיב הפסוקים אין בה כדי לבטא את מה שצריך ביטוי במתמטיקה. כך למשל איננו יכולים לכתוב משפט מהצורה "**אין** מספר טבעי שגדול מהריבוע של עצמו". ואיננו יכולים לכתוב כלל היסק מהצורה הבאה:

טס כלבה.
לאה חתולה.
<u>טס רודפת אחרי לאה.</u>
מסקנה: **יש** כלבה שרודפת אחרי חתולה כלשהי.



**תחשיב היחסים** או **תחשיב הפרדיקטים** מאפשר לנו לכתוב גם משפטים מורכבים כאלה הכוללים את המילים "אין, יש, קיים, לכל". בזה נעשיר מאוד את כוח הביטוי שלנו, אך נאבד את יכולתנו לבדוק את נכונותו של פסוק באופן מכני. הדיון שלנו כאן יהיה חלקי למדי. טיפול מקיף בנושאים אלה ניתן בקורסים בלוגיקה מתמטית.

כזכור בסעיף 1.3 הגדרנו יחסים בינאריים. נכליל זאת כאן ליחס n – מקומי כלשהו.

**הגדרה 2.3.1:** תהי S קבוצה כלשהי. קבוצה R נקראת **יחס n – מקומי** ב- S אם $R \subseteq \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n}$. נאמר ש- $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ **נכון** ביחס R אם $(s_1,s_2,\ldots,s_n) \in R$. נסמן זאת גם על ידי $R(s_1,s_2,\ldots,s_n) = T$, או בקיצור $R(s_1,s_2,\ldots,s_n)$. אחרת, נאמר ש- $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ **שקרי** ביחס R ונסמן זאת על ידי $R(s_1,s_2,\ldots,s_n) = F$, או על ידי $\neg R(s_1,s_2,\ldots,s_n)$.

כך למשל, יחס אונארי הוא יחס 1 – מקומי, ואילו יחס בינארי הוא יחס 2 – מקומי.

**הערה:** יחסים אונאריים ניתן לייצג באופן חד-ערכי על ידי קבוצת האיברים המקיימים את היחס. כלומר, יחס אונארי מבטא בעצם שייכות לקבוצה. לכן, אם x נכון ביחס R נרשום זאת על ידי $x \in R$.

**דוגמה 2.3.2:** נתבונן ביחס הבינארי "אוהב את" "Love" המוגדר על קבוצת כל האנשים, כאשר $(x,y) \in Love$ מבטא את התנאי "x אוהב את y". נסמן זאת גם על ידי $Love(x,y) = T$ או פשוט על ידי $Love(x,y)$.

**דוגמה 2.3.3:** נגדיר כעת את היחס האונארי "להיות מספר טבעי" "Integer" המוגדר על המספרים הממשיים. נרשום $x \in Integer$ אם "x מספר טבעי". במקרה זה נרשום גם $Integer(x)$.

## הכמתים הלוגיים

הכמתים הלוגיים מאפשרים לנו לכתוב משפטים הכוללים ביטויים כגון "**לכל** ילד יש הורים" או "לא **קיימים** ילדים רעים". יש שני כמתים מרכזיים והם הכמת "לכל" הנקרא גם **הכמת הכולל**, והכמת "קיים", הנקרא גם **הכמת הישי**.

**הכמת "לכל":** מסומן על ידי $\forall$. יהי R יחס כלשהו, ויהי x משתנה. אז פירוש הפסוק $\forall x\ R(x)$ הוא "לכל x מתקיים $R(x)$".

**הכמת "קיים":** מסומן על ידי $\exists$. יהי R יחס כלשהו, ויהי x משתנה. אז פירוש הפסוק $\exists x\ R(x)$ הוא "קיים x כך שמתקיים $R(x)$".

אנו מעשירים את השפה תוך שימוש בכמתים האלה. הקשרים הלוגיים שבהם השתמשנו בתחשיב הפסוקים ממשיכים לשמש אותנו גם כאן. גם במקרה זה נוסיף סוגריים כדי להדגיש את החלקים השונים של הפסוק. להלן כמה דוגמאות.

**דוגמה 2.3.4:** נתבונן ביחס $Dog(x)$ שפירושו "x הוא כלב" וכן ביחס $HasTail(x)$ שפירושו "ל- x יש זנב". משמעות הפסוק הבא

$$\forall x\ (Dog(x) \rightarrow HasTail(x))$$

היא: "לכל x, אם x כלב אז ל- x יש זנב". ובשפת בני אדם פירוש הפסוק הוא "לכל הכלבים יש זנב".

**דוגמה 2.3.5:** את המשפט "כל ילד אוהב ילדה כלשהי" אנו ננסח כך: "לכל x, אם x ילד אז יש y כך ש- y ילדה ו- x אוהב את y". ולכן הפסוק המתאים יהיה:

$$\forall x\ (Boy(x) \rightarrow \exists y\ (Girl(y) \wedge Love(x,y))).$$

**דוגמה 2.3.6:** את המאהב האוניברסאלי דון ז'ואן נאפיין על ידי המשפט "יש גבר שאוהב את כל הנשים". אפשר לכתוב זאת גם באופן הבא: "יש x כך ש- x גבר, ולכל y, אם y אישה אז x אוהב את y". לכן הפסוק המתאים יהיה:

$$\exists x\ (Man(x) \wedge \forall y\ (Woman(y) \rightarrow Love(x,y))).$$

**דוגמה 2.3.7:** נכתוב פסוק המתאר את המשפט "אין מספר טבעי שגדול מהריבוע של עצמו". נגדיר שני יחסים, היחס האונארי $Integer(x)$ שנכון אם x מספר טבעי, והיחס הבינארי $Greater(x,y)$ שנכון אם $x > y$. הפסוק המתאים יהיה:

$$\neg\exists x\ (Integer(x) \wedge Greater(x,x^2)).$$

מקובל בפרקטיקה המתמטית לרשום פסוקים כאלה בקיצור מה. כך למשל, רגיל יותר לרשום את הפסוק לעיל באופן הבא:

$$\neg\exists x \in \mathbb{N}, x > x^2$$

או גם כך:

$$\nexists x \in \mathbb{N}, x > x^2$$

ואומרים: "לא קיים x טבעי כך ש- $x > x^2$".

**דוגמה 2.3.8:** נתבונן ביחסים $P(x)$ המייצג "x חי" ו- $Q(x)$ שמייצג "x מת". פירוש הפסוק $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ הוא "לכל x מתקיים x חי או מת". ובשפת אנוש: "כל אחד חי או מת".

## ערך האמת של פסוק

אנו מגיעים עתה אל הקושי בבירור הנכונות של פסוקים בתחשיב היחסים. כאן אין לנו דרך מכנית לוודא האם פסוק הוא נכון. אי-אפשר במקרה זה לכתוב טבלת אמת, מכיוון שתחום הערכים שעליו פועל היחס יכול להיות אינסופי. כמו-כן, נכונותו של פסוק יכולה להיות תלויה ב"**עולם**" או בתחום הערכים שעליו מוגדר היחס.

**דוגמה 2.3.9:** המשפט "לכל מספר יש שורש ריבועי" אינו נכון כשמדובר בעולם המספרים הממשיים, כי למשל למספר $-1$ אין שורש בעולם זה. אולם הפסוק הזה נכון בעולם המספרים המרוכבים. כדי להימנע מבלבול, רצוי להגדיר יחס אונארי "להיות מספר ממשי Real". כמו-כן, נגדיר יחס Square(x,y) שנכון אם ורק אם $x = y^2$. המשפט המתאים יהיה:

$$\forall x\ (\mathrm{Real}(x) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{Real}(y) \wedge \mathrm{Square}(x,y)))$$

ומשפט זה שקרי כמובן. אגב, הכתיבה המקוצרת והנהוגה יותר של משפט (שקרי) זה היא:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (y^2 = x).$$

## שקילות לוגית

גם בתחשיב היחסים יש מספר זהויות לוגיות מועילות שמאפשרות לפשט לעתים פסוקים מסובכים. לזהויות האלה יש חשיבות רבה גם בתחום של הוכחות במתמטיקה, כפי שנראה בהמשך. נפתח בשתי הזהויות הלוגיות הפשוטות הבאות:

$$\forall x\ \forall y\ P(x,y) \equiv \forall\ y\ \forall x\ P(x,y).$$
$$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists\ y\ \exists x\ P(x,y).$$

לאור זאת מקובל במקרים אלה לרשום בקיצור: $\forall x, y\ P(x,y)$ ו- $\exists x, y\ \ P(x,y)$.

**הערה:** שימו לב, כשמדובר בפסוק הכולל כמתים משני הסוגים אי אפשר סתם להחליף את סדר הכמתים. כלומר, באופן כללי אין זה נכון ש- $\forall x \exists\ y\ P(x,y) \equiv \exists\ y\ \forall x\ P(x,y)$.

**דוגמה 2.3.10:** נתבונן ביחס Father(x,y) שפירושו "y הוא אבי x", וביחס H המייצג את אוסף כל בני האדם. אז הפסוק הבא:

$$\forall x{\in}H\ \ \exists y{\in}H\ \mathrm{Father}(x,y)$$

מבטא את הטענה הנכונה שלכל אדם יש אבא (מה בדבר האדם הראשון?). ננסה להפוך את סדר הכמתים ונראה מה נקבל:

$$\exists y{\in}H\ \ \forall x{\in}H\ \mathrm{Father}(x,y)$$

פסוק זה טוען שיש אדם y שהוא האבא של כולם, דבר שהוא מופרך בעליל.

הכללים האנלוגיים לכללי דה-מורגן מנוסחים במשפט הבא.

**משפט 2.3.11:** יהי P יחס כלשהו. אז:

$$\forall x\ P(x) \equiv \neg\exists x\ \neg P(x)$$
$$\exists x\ P(x) \equiv \neg\forall x\ \neg P(x)$$
$$\forall x\ \neg P(x) \equiv \neg\exists x\ P(x)$$
$$\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$$

באופן כללי כדי לחשב את שלילתו של פסוק יש לסקור את הכמתים משמאל לימין ולהפוך כל כמת כולל לכמת ישי ולהיפך. את הפסוק הפנימי חסר הכמתים מחליפים בשלילתו. נתבונן בדוגמה הבאה.

**דוגמה 2.3.12:** מקודם רשמנו את הפסוק (הנכון) הבא:

$$\neg\exists x \in \mathbb{N}, x > x^2$$

על פי כללי דה-מורגן הוא שקול לפסוק הבא:

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \le x^2$$

ובשפת בני אדם: כל מספר טבעי קטן מהריבוע של עצמו או שווה לו.

**דוגמה 2.3.13:** תחשיב היחסים הוא השפה שבה מתקיים הלכה למעשה השיח המתמטי. את העובדה שהמספרים הרציונאליים הם קבוצה סדורה שבה בין כל שני מספרים שונים יש יחס סדר אנו מביעים על ידי הפסוק:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \quad (x \ne y) \rightarrow (x > y) \vee (y > x).$$

ובקצרה:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (x \ne y) \rightarrow (x > y) \vee (y > x).$$

את העובדה שאין מספר טבעי גדול ביותר נרשום כך:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \quad (y > x).$$

על מנת לתרגל את כללי דה-מורגן נרשום את שלילתו (השקרית) של משפט זה:

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} \quad (x \ge y)$$

ושוב נצביע על השיטה: הפכנו כל אחד מהכמתים (בין כמת ישי לכמת כולל) ולבסוף רשמנו את שלילתו של הפסוק הפנימי $(y > x)$ שהיא $(x \ge y)$.

**תרגילים**

1. כתבו פסוקים המתארים את המשפטים הבאים. בכל מקרה הגדירו במדויק גם את היחסים שבהם אתם נעזרים.
   א. כל מספר שלם זוגי הוא סכום של שני מספרים אי-זוגיים.
   ב. יש אנשים שכולם אוהבים אותם ויש אנשים שכולם שונאים אותם.
   ג. לכל איש יש ספר שכל עמודיו ריקים.

ד. יש אינסוף ראשוניים. רמז: נסו לנסח את המשפט הזה בדרך אחרת.

ה. לכל מספר טבעי k קיים מספר טבעי n, כך שלכל מספר טבעי $1 \le i \le k$ המספר $n + i$ איננו ראשוני.
**אתגר:** זו אכן טענה תקפה בתורת המספרים. התוכלו להוכיחה?

2. ציינו לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים האם הוא נכון או לא:

א. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad (x \le y) \vee (x \ge y)$.

ב. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad (x < y) \vee (x > y)$.

ג. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \quad x + x = y$.

ד. $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N} \quad x + x = y$.

## הערות היסטוריות

**קורט גדל Kurt Gödel (נולד באוסטרו-הונגריה ב- 1906, מת בארה"ב ב- 1978)** מגדולי הלוגיקנים בכל הדורות. העבודה המפורסמת הראשונה שלו מ- 1931 שינתה את נקודת המבט המקובלת על מהותו של המחקר המתמטי. כך למשל, קיווה דויד הילברט, לפתח שיטה מכנית שתאפשר להוכיח את כל המשפטים המתמטיים הנכונים. גם ברטרנד ראסל כתב את ספרו Principia Mathematica בתקווה דומה לספק ביסוס אקסיומתי מלא לכל המתמטיקה. משפט האי-שלמות של גדל מראה שמאמצים כאלה נדונו לכישלון מפני שבכל תורה מתמטית עשירה די הצורך יש טיעונים שאינם ניתנים להוכחה אך גם אינם ניתנים לסתירה במסגרת אותה תורה. מעבודתו של גדל נובע גם שבעיות חישוב רבות אינן ניתנות לפתרון (אינן כריעות). דוגמה חשובה לכך היא האי-כריעות של **בעיית העצירה** היסודית במדעי המחשב.
גדל לקה בהתמוטטות עצבים לאחר שסטודנט נאצי רצח את שליק Schlick שהיה המורה של גדל. בעקבות זאת הוא גם החליט להגר לארה"ב. בפרינסטון, לשם היגר, הוא כתב עבודה חשובה על השערת הרצף (ראו סעיף 1.5). בעיותיו הנפשיות של גדל המשיכו ואף גברו, ובערוב ימיו הוא השתכנע שמנסים להרעילו והרעיב את עצמו למוות.

**דויד הילברט David Hilbert (נולד בפרוסיה ב- 1862, מת בגרמניה ב- 1943).** נחשב לאחד מגדולי המתמטיקה בכל הדורות, ולמתמטיקאי האחרון שעבודתו הקיפה את כל תחומי המתמטיקה של דורו. הילברט החל את עבודתו בתורת האינווריאנטות, תחום המקשר בין אלגברה לגיאומטריה. גישתו המופשטת התקבלה בתדהמה על ידי המתמטיקאים בני תקופתו. הוא הניח בעבודותיו יסודות לאלגברה המודרנית ולגיאומטריה האלגברית. הוא תרם גם תרומות מכריעות לתורת המספרים. עבודתו באנליזה מתמטית מבשרת הרבה מההתפתחויות של האנליזה במאה ה- 20 (**מרחבי הילברט** קרויים על שמו).
אחד האופנים שבו השפיע הילברט על הרבה מן ההתפתחויות המתמטיות במאה ה- 20 הוא באמצעות **בעיות הילברט**. בקונגרס המתמטי העולמי בפריס בשנת 1900, ניסח הילברט 23 בעיות פתוחות שהציע כאתגרים מרכזיים במתמטיקה. כמה מן הבעיות הללו נפתרו תוך שנים ספורות. חלקן – בהמשך המאה, וכמה מהן פתוחות עד היום. כל התקדמות בפתרון בעיות הילברט נחשבת למאורע מסעיר בעולם המתמטי.