1. מבוא לתורת הקבוצות

בפרק זה נסקור את המונחים והסימנים הבסיסיים של תורת הקבוצות. מונחים אלה ישמשו אותנו כשפה שבה נדון בכל יתר הנושאים שיוצגו בספר זה. אבי תורת הקבוצות היה גאורג קנטור, מתמטיקאי גרמני שחי במאה ה- 19. זמן מה לאחר פרסום תורתו של קנטור התגלו בה סתירות לוגיות מסוימות. תגליות אלה הוליכו לחיפוש בסיס מוצק יותר לתורת הקבוצות ולפיתוחה של תורת הקבוצות האקסיומתית. אנו נדון כאן רק בתורת הקבוצות הנאיבית, כפי שפותחה על ידי קנטור, כיוון שהיא מאפשרת להגיע במהירות לתוצאות העיקריות הדרושות לנו בתורת הקבוצות. עלינו לזכור שבתורת הקבוצות הנאיבית מתעוררים פרדוקסים מסוימים, כפי שנדגים בהמשך בעזרת פרדוקס ראסל. למרבה המזל, קשיים אלה לא יפריעו לנו כלל במסגרת הנושאים הנדונים בספר זה.

1.1 מונחים בסיסיים מתורת הקבוצות

הנושאים שיוצגו: *קבוצה, איבר, שייכות, שוויון קבוצות, תת-קבוצה, הקבוצה הריקה, קבוצה אוניברסלית, דיאגרמות ון.*

המונח הבסיסי ביותר בתורת הקבוצות הוא כמובן הקבוצה. בספר זה לא נפתח בצורה פורמלית ומלאה את תורת הקבוצות, ולכן לא ניתן הגדרה מתמטית מדויקת של מונח זה, אלא נסתפק בהסבר. עובדה זו לא תמנע מאיתנו להגיע לתוצאות המעניינות של תורת הקבוצות.

הגדרה 1.1.1: **קבוצה** היא אוסף של **איברים** שונים זה מזה. אין כל חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. **איבר** יכול להיות כל דבר, ובלבד שיהיה ברור האם הוא **שייך** לקבוצה או לא. אם האיבר x **שייך** לקבוצה A, נסמן זאת על ידי $x\in A$, ואם האיבר x **אינו שייך** לקבוצה A, נסמן זאת על ידי $x\notin A$.

בדרך כלל נסמן קבוצות באותיות הגדולות של הא״ב האנגלי ואיברים באותיות הקטנות. איברי הקבוצה ייכתבו בין סוגריים מסולסלים { } כאשר פסיקים מפרידים ביניהם.

דוגמה 1.1.2: בקבוצה $S = \{a,b,c,d\}$ יש 4 איברים. שימו לב, ניתן היה לכתוב את S גם בצורה הבאה $S = \{b,a,d,c\}$ משום שהסדר שבו רשומים האיברים בקבוצה אינו חשוב. לעומת זאת, הקבוצה $A = \{S\} = \{\{a,b,c,d\}\}$ היא קבוצה שבה יש רק איבר אחד, והוא הקבוצה S, כי הרי אמרנו שאיבר יכול להיות כל דבר ובפרט גם קבוצה.

לעתים נתאר קבוצה על ידי ציון תנאי מסוים המאפיין בדיוק את כל איברי הקבוצה. כך למשל, הקבוצה $B = \{n \mid$ מספר שלם בין 1 ל- 4 $n\}$ היא קבוצת כל המספרים n, כך ש- n מספר שלם בין 1 ל- 4, כלומר $B = \{1,2,3,4\}$.

קבוצות חשובות

- **הקבוצה הריקה** היא קבוצה שבה אין איברים, והיא מסומנת על ידי $\varnothing$.

עד כה ראינו רק קבוצות סופיות, אולם יש גם קבוצות אינסופיות חשובות, למשל:

- קבוצת **המספרים הטבעיים** היא קבוצת כל המספרים השלמים האי-שליליים, והיא תסומן על ידי $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$ או $\mathbb{N} = \{n \mid$ מספר שלם אי-שלילי $n\}$. נסמן ב- $\mathbb{N}^+$ את קבוצת המספרים הטבעיים החיוביים, כלומר $\mathbb{N}^+ = \{1,2,3,...\}$. לעתים מסמנים את הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ של n המספרים הטבעיים החיוביים הראשונים גם על ידי [n].
- קבוצת **המספרים השלמים** היא קבוצת כל המספרים השלמים, אי-שליליים ושליליים כאחד, והיא תסומן על ידי $\mathbb{Z} = \{...-2,-1,0,1,2,...\}$.
- קבוצת **המספרים הרציונאליים** היא קבוצת כל השברים. קבוצה זו תסומן על ידי $\mathbb{Q} = \{q \mid m \neq 0$ ו- $n,m \in \mathbb{Z}$ כאשר $q = \frac{n}{m}\}$. נסמן ב- $\mathbb{Q}^+$ את קבוצת המספרים הרציונאליים החיוביים.
- ולסיום, קבוצת **המספרים הממשיים** שתסומן על ידי $\mathbb{R}$, ותכלול גם מספרים כמו π, $\sqrt{2}$, ועוד מספרים שאי-אפשר להציגם כשברים שבהם גם המונה וגם המכנה הם מספרים שלמים. נסמן ב- $\mathbb{R}^+$ את קבוצת המספרים הממשיים החיוביים.

תיאור מפורט ומלא של הקבוצה האינסופית החשובה $\mathbb{R}$ ניתן בקורסים בחשבון אינפיניטסימלי. בנייה שיטתית של הקבוצה $\mathbb{R}$ כרוכה במאמץ לא מבוטל, וקיומם של מספרים ממשיים שאינם רציונאליים היא עובדה בהחלט לא מובנת מאליה. אכן, העובדה שלא כל המספרים הם רציונאליים התקבלה על ידי המתמטיקאים היוונים בתדהמה. אנו נוכיח עתה שהמספר הממשי $\sqrt{2}$ איננו רציונאלי. מנין לנו ש- $\sqrt{2}$ אכן לא ניתן להצגה כשבר? ההוכחה תהיה **בדרך השלילה**. בצורת הוכחה זו אנו מניחים שהמשפט אינו נכון, ואז מנסים להגיע לסתירה להנחות המשפט או סתירה לעובדות אחרות שכבר הוכחו בעבר כנכונות (הסבר נוסף על דרך הוכחה זו יינתן בסעיף 2.2).

משפט 1.1.3: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. דהיינו, נניח שקיימים מספרים $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, כך ש- $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$. נניח גם ש- $\frac{n}{m}$ הוא הייצוג המצומצם של $\sqrt{2}$ בתור שבר, כלומר אין ל- m ול- n גורם משותף. נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$, ומכאן, $2m^2 = n^2$. נובע שהמספר n^2 הוא מספר זוגי, כי הוא שווה ל- $2m^2$.
נשים לב שלא ייתכן שהמספר n אי-זוגי, מפני שריבוע של מספר אי-זוגי הוא אי-זוגי (בדקו!). לכן המספר n חייב להיות זוגי. אבל ריבוע של מספר זוגי מתחלק ב- 4, ולכן גם $\frac{n^2}{2}$ מספר זוגי. אם כן $m^2 = \frac{n^2}{2}$ מספר זוגי, ולכן כמו קודם גם m זוגי. כך קיבלנו ש-n,m שניהם זוגיים, בסתירה לכך שהנחנו שאין להם גורם משותף.
הגענו אם כן לסתירה, ולכן הנחת השלילה לא הייתה נכונה. $\square$

כיצד נשווה בין קבוצות שונות? ההגדרה הבאה עוסקת בכך.

הגדרה 1.1.4: שתי קבוצות A,B תקראנה **שוות** אם ורק אם יש להן בדיוק אותם איברים. נסמן זאת על ידי $A = B$. אחרת, A,B ייקראו **שונות** ונסמן זאת על ידי $A \neq B$.

הקבוצה A **מוכלת** ב-B או A **תת-קבוצה** של B אם ורק אם כל איבר של A שייך גם לקבוצה B. נסמן זאת על ידי $A \subseteq B$. אם A **אינה מוכלת** ב- B נסמן זאת על ידי $A \not\subset B$.

נאמר שהקבוצה A **מוכלת ממש** בקבוצה B אם $A \subseteq B$ וגם $A \neq B$. נסמן זאת על ידי $A \subsetneqq B$.

הקבוצות A,B ייקראו **זרות** אם אין להן איברים משותפים.

דוגמה 1.1.5: קל לראות כי $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,d,c\}$, ואילו הקבוצות $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ זרות.
כמו כן, $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$. הסבירו מדוע $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$. מדוע $\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$?

דוגמה 1.1.6: שימו לב שקבוצה שמכילה את הקבוצה הריקה בתור איבר איננה ריקה! הרי יש בה איבר אחד - הקבוצה הריקה. כך למשל בקבוצה $A = \{\varnothing, a\}$ יש שני איברים. ייתכן שהדוגמה הזאת מבלבלת במקצת, אולם אם תחזרו שנית על ההגדרות תיווכחו שאין בה כל קושי.

הקבוצה הריקה מוכלת בכל אחת מהקבוצות שנזכרו עד כה. עובדה זו אינה מקרית. הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה. אף כי זו טענה פשוטה, נוכיח אותה בצורה פורמלית.

משפט 1.1.7: תהי A קבוצה כלשהי, אז $\varnothing \subseteq A$.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה, כלומר $\varnothing \not\subset A$. לפי הגדרת ההכלה של קבוצות, חייב להיות לפחות איבר אחד ששייך לקבוצה הריקה ואינו שייך לקבוצה A. אולם זו סתירה להגדרתה של הקבוצה הריקה כקבוצה שבה אין איברים. □

מההגדרות שראינו עד כה נובעות עוד תכונות שימושיות של קבוצות ושל יחס ההכלה $\subseteq$.

משפט 1.1.8: תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, אז:

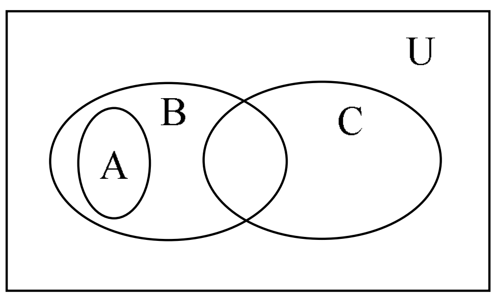
1. **תכונת הרפלקסיביות:** $A\subseteq A$.
2. **תכונת הטרנזיטיביות:** אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$.
3. **תכונת האנטי-סימטריות:** $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$ אם ורק אם $A = B$.

הוכחה: ההוכחה נובעת ישירות מההגדרות והיא תרגיל לקוראים. □

שימו לב לכך שתכונת האנטי-סימטריות, המוגדרת במשפט האחרון, שימושית בהוכחת שוויון של קבוצות. על מנת להוכיח ששתי קבוצות A,B שוות, מספיק על פי משפט זה להוכיח **הכלה לשני הכיוונים**, כלומר להוכיח ש- $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$. עובדה זו תסייע לנו בהמשך להוכיח שוויון בין קבוצות.

הגדרה 1.1.9: לעתים יהיו כל הקבוצות שבהן נדון חלקיות לקבוצה אחת קבועה. קבוצה זאת תיקרא **הקבוצה האוניברסלית** לצורך הדיון.

הלוגיקן האנגלי ג'ון ון המציא שיטה נוחה לתיאור קבוצות על ידי דיאגרמות. דיאגרמות אלו נקראות על שמו **דיאגרמות ון**, והן מתארות את מצבן היחסי של כמה קבוצות. כך למשל הדיאגרמה הבאה מתארת שלוש קבוצות A,B,C כולן חלקיות לקבוצה האוניברסלית U. כמו-כן $A\subseteq B$ ואילו הקבוצות A,C זרות.



תרשים 1.1.1: דיאגרמת ון.

דיאגרמות ון יסייעו לנו לפתח אינטואיציה לגבי משפחות של קבוצות, אך הן אינן מהוות תחליף להוכחה פורמלית.

פרדוקס ראסל

לסיום סעיף זה, נרמוז על הקושי המתעורר בפיתוח לא מלא של תורת הקבוצות. כאמור, הקשיים האלה הוליכו להתפתחויות חשובות במתמטיקה, אך לצורך הנושאים הנדונים בספר זה אין הכרח ללומדן. כאשר מגדירים קבוצות יש להיזהר שלא להגדיר "יצורים" בלתי הגיוניים. האם כל אוסף של איברים הוא קבוצה? כך למשל, האם אוסף כל הקבוצות הוא קבוצה? מתברר שנדרש לצמצם את היריעה ולהגביל את הקבוצות שבהן נדון, אחרת אנו עלולים להיקלע לסתירות לוגיות.

הלוגיקן ברטרנד ראסל הגדיר את קבוצת כל הקבוצות שאינן כוללות את עצמן בתור איבר. תהי $A = \{B \mid B \notin B\}$ הקבוצה הזאת, כלומר B איבר של A אם $B \notin B$. השאלה היא האם A שייכת לעצמה כאיבר או לא?
נניח ש- $A \in A$. לפי הגדרת הקבוצה A מתקיים $A \notin A$, וזו סתירה.
נניח לכן ש- $A \notin A$. שוב לפי הגדרת הקבוצה A מתקיים $A \in A$, ושוב קיבלנו סתירה.
ראינו אם כן שבכל מקרה הגענו לסתירה, וזה כמובן לא ייתכן. משמע שלא ניתן להגדיר את האוסף A בתור קבוצה.

קושי דומה מתעורר אם נרצה לדון בקבוצת כל הקבוצות. נניח שהקבוצה S היא קבוצת כל הקבוצות, ונגדיר קבוצה $A = \{B \mid B \in S,\ B \notin B\}$. מכיוון ש-S היא קבוצת כל הקבוצות, הרי $A \in S$. אם $A \in A$, אז לפי הגדרת הקבוצה A מתקיים $A \notin A$. באותו אופן אם $A \notin A$, אז $A \in A$. כלומר הגענו לסתירה בכל מקרה, ולכן $A \notin S$. לכן קיימת קבוצה שאיננה שייכת לקבוצה S, ולכן S איננה קבוצת כל הקבוצות.

הבעיה בדוגמאות שראינו כעת היא כאמור שאוסף הקבוצות היה מקיף מדי. הגישה שבה ננקוט בספר זה ידועה בשם **תורת הקבוצות הנאיבית**. גישה זו מאפשרת להגיע במהירות לתוצאות העיקריות הדרושות לנו בתורת הקבוצות. קיומם של פרדוקסים מעין אלו שהוצגו, לא יפגע כלל בדיון שלנו. בתחומים אחרים של המתמטיקה נדרשת הקפדה רבה יותר ודיון פורמלי ומדויק יותר בתורת הקבוצות. למזלנו, בתחום המתמטיקה הבדידה אנו פטורים מצורך זה.

תרגילים

1. אילו מהקבוצות הבאות שוות זו לזו?
   א. $A = \{\, x \mid$ x שורש של המשוואה $x^2-7x+12=0 \,\}$.
   ב. $B = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ 2 \le y \le 3\}$.
   ג. $C = \{\, q \mid$ q הוא מספר הצלעות של מקבילית או מספר הצלעות של משולש $\}$.

2. אילו מהקבוצות הבאות שוות זו לזו?
   א. $A = \{\, m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$.
   ב. $B = \{\, m \in \mathbb{Z} \mid m^3 = m\}$.
   ג. $C = \{\, m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \le 2m\}$.
   ד. $D = \{\, m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \le 1\}$.
   ה. $E = \{0,1,2\}$.

3. מצאו דוגמאות לקבוצות A,B,C המקיימות:
   א. $A\in B,\ B\in C,\ A\notin C$.
   ב. $A\in B,\ B\in C,\ A\in C$.
   ג. $A\in B,\ A\subseteq B$.

4. תהיינה P,Q,R קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. אם $P\in Q$ וגם $Q\subseteq R$ אז $P\in R$.
   ב. אם $P\in Q$ וגם $Q\subseteq R$ אז $P\subseteq R$.
   ג. אם $P\subseteq Q$ וגם $Q\in R$ אז $P\in R$.
   ד. אם $P\subseteq Q$ וגם $Q\in R$ אז $P\subseteq R$.

1.2. פעולות על קבוצות

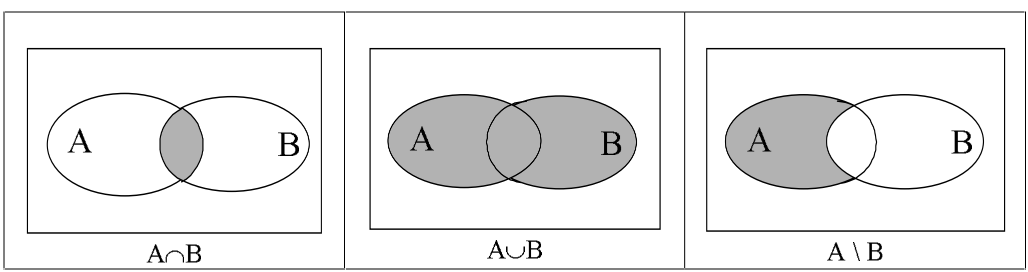
הנושאים שיוצגו: *איחוד, חיתוך, הפרש, החוק האסוציאטיבי, חוק הפילוג, חוק החילוף, המשלים, חוקי דה-מורגן, קבוצת החזקה, זוג סדור, מכפלה קרטזית.*

לאחר שהגדרנו את המונח קבוצה, נעבור לדון בהגדרת הפעולות הבסיסיות שאפשר לבצע על קבוצות. בדומה לפעולות החשבוניות המוגדרות על מספרים, ניתן להגדיר פעולות על קבוצות ובעזרתן ליצור מקבוצות קיימות קבוצות חדשות.

הגדרה 1.2.1: תהיינה A,B קבוצות כלשהן.
החיתוך שלהן הוא: $A\cap B = \{x \mid x\in A$ וגם $x\in B\}$
האיחוד שלהן הוא: $A\cup B = \{x \mid x\in A$ או $x\in B\}$
ההפרש ביניהן הוא: $A \setminus B = \{x \mid x\in A$ וגם $x\notin B\}$

הערה: שימו לב, הכוונה בביטוי "$x\in A$ **או** $x\in B$" היא ש- x הוא איבר של הקבוצה A, **או** x הוא איבר של הקבוצה B, **או** x הוא איבר של שתי הקבוצות. דיון נוסף במשמעות המילה "או" במתמטיקה יינתן בסעיף 2.1.

בעזרת דיאגרמות ון ניתן לתאר את הפעולות האלה באופן הבא:



תרשים 1.2.1: דיאגרמות ון של הפעולות הבסיסיות בין שתי קבוצות.

דוגמה 1.2.2: תהיינה $A = \{a,b,c,d\},\ B = \{b,c,e\}$ קבוצות. אז:

$$A \setminus B = \{a,d\} \qquad A\cup B = \{a,b,c,d,e\} \qquad A\cap B = \{b,c\}$$

ואילו המספרים הטבעיים והשלמים מקיימים:

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \varnothing, \quad \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$$

נציין ללא הוכחה שני משפטים פשוטים אך מועילים:

משפט 1.2.3: תהיינה A,B קבוצות כלשהן. הקבוצות A,B זרות אם ורק אם $A\cap B = \varnothing$.
הוכחה: הטענה נובעת ישירות מההגדרות. □

משפט 1.2.4: תהי A קבוצה כלשהי, אז:

1. $A\cap\varnothing = \varnothing$.
2. $A\cup\varnothing = A$.
3. $A\cap A = A$.
4. $A\cup A = A$.
5. $A \setminus A = \varnothing$.

נעבור עתה למשפט חשוב ושימושי.

משפט 1.2.5: כל שלוש קבוצות A,B,C מקיימות את החוקים הבאים:

1. **חוק החילוף או החוק הקומוטטיבי**:

$$A\cap B = B\cap A$$
$$A\cup B = B\cup A$$

2. **חוק הקיבוץ או החוק האסוציאטיבי:**

$$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$$
$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$$

3. **חוק הפילוג או החוק הדיסטריביוטיבי:**

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

הוכחה: נוכיח רק את חוק הפילוג. יתר הסעיפים הם תרגיל לקוראים.
נוכיח רק את החוק הראשון $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$. הוכחת החוק השני דומה. כדי להוכיח שוויון של שתי קבוצות, כפי שטוען חוק זה, נשתמש בתכונת האנטי-סימטריות ממשפט 1.1.8. לשם כך, עלינו להוכיח הכלה לשני הכיוונים.

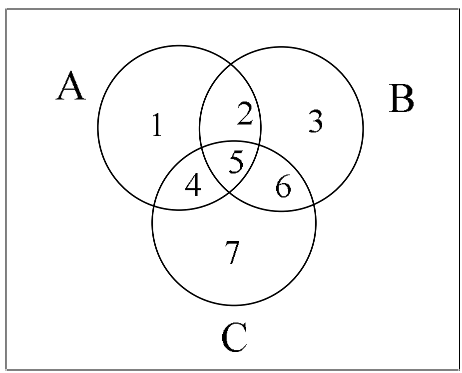
נראה תחילה ש- $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$: כדי להוכיח שקבוצה אחת מוכלת בשניה, עלינו להראות שכל איבר בקבוצה זו שייך לקבוצה השנייה. לכן, יהי $x\in A\cap(B\cup C)$. לפי הגדרת פעולת החיתוך מתקיים $x\in A$ וגם $x\in B\cup C$. מכאן לפי הגדרת פעולת האיחוד $x\in A$ וגם ($x\in B$ או $x\in C$). ולכן, ($x\in A$ וגם $x\in B$) או ($x\in A$ וגם $x\in C$). כלומר, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

כעת נראה ש- $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$: באותו אופן יהי $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. לפי הגדרת פעולת האיחוד, $x\in A\cap B$ או $x\in A\cap C$. על ידי שימוש בהגדרת פעולת החיתוך, ($x\in A$ וגם $x\in B$) או ($x\in A$ וגם $x\in C$). לכן בכל מקרה, $x\in A$ וגם ($x\in B$ או $x\in C$). ולכן, $x\in A\cap(B\cup C)$.

הראינו הכלה לשני הכיוונים, ולכן שתי הקבוצות שוות כפי שנטען. □

ניתן להדגים את נכונות המשפט גם על ידי ציור דיאגרמות ון. נסו! אולם, זכרו כי דיאגרמות ון אינן מהוות תחליף להוכחה פורמלית. לעומת זאת, כדי להפריך טענה, השימוש בדיאגרמות ון מותר וגם יעיל, כפי שנראה מיד.
כפי שראינו במשפט 1.2.5, החוק האסוציאטיבי מאפשר לחשב איחוד או חיתוך של קבוצות בכל סדר שהוא, כלומר מיקום הסוגריים אינו חשוב. הדבר אינו נכון בביטויים הכוללים פעולות חיתוך ואיחוד כאחד.

דוגמה 1.2.6: תהיינה A,B,C קבוצות. נוכיח כי הקבוצה $A \cup (B\cap C)$ לא בהכרח שווה לקבוצה $(A\cup B) \cap C$. נצייר דיאגרמת ון של שלוש הקבוצות, ונשים בכל אחד מאזורי הדיאגרמה בדיוק איבר אחד, כאשר האיברים ממוספרים מ- 1 עד 7. ראו תרשים 1.2.2.



תרשים 1.2.2: דיאגרמת ון של שלוש הקבוצות A,B,C בדוגמה 1.2.6.

קל לוודא בעזרת הדיאגרמה ש- $(A\cup B) \cap C = \{4,5,6\}$ ואילו $A \cup (B\cap C) = \{1,2,4,5,6\}$.
כלומר, מצאנו קבוצות A,B,C כך ש: $(A\cup B) \cap C \neq A \cup (B\cap C)$. דהיינו, $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{2,3,5,6\}$ ו- $C = \{4,5,6,7\}$.

לעתים נדון במספר רב יותר של קבוצות. במקרה זה נשתמש בסימונים המקוצרים הבאים:

הגדרה 1.2.7: תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות כלשהן. נסמן את אוסף הקבוצות גם על ידי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$.

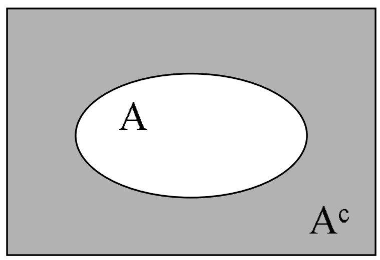
איחוד כל n הקבוצות יסומן על ידי $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. חיתוך כל n הקבוצות יסומן על ידי $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

קבוצה I שבה לכל $i \in I$ מותאמת קבוצה A_i, נקראת קבוצה של **אינדקסים** (או **מציינים**).
נסמן את אוסף הקבוצות A_i המוגדר בעזרת I על ידי $\{A_i\}_{i \in I}$.
איחוד כל הקבוצות A_i יסומן על ידי $\bigcup_{i \in I} A_i$. חיתוך כל הקבוצות A_i יסומן על ידי $\bigcap_{i \in I} A_i$.

שימו לב לכך שהסימונים המקוצרים לאיחוד וחיתוך של מספר כלשהו של קבוצות, אינם גורמים בעיה בסדר חישוב פעולות האיחוד או החיתוך, כי כאמור פעולות אלה אסוציאטיביות לפי משפט 1.2.5.

לעתים נרצה לדון בכל האיברים שאינם שייכים לקבוצה מסוימת. במקרה כזה נדרשת קבוצה אוניברסלית כלשהי U שאליה נוכל להתייחס. כך למשל אם A היא קבוצת כל תלמידי שנה א׳ שעברו את המבחן בהצלחה, אז הקבוצה ״המשלימה״ תהיה קבוצת כל תלמידי שנה א׳ שלא עברו את המבחן. במקרה זה הקבוצה האוניברסלית היא קבוצת כל תלמידי שנה א׳. ההגדרה הבאה מגדירה את הקבוצה ״המשלימה״ בצורה פורמלית.

הגדרה 1.2.8: תהי U קבוצה אוניברסלית ותהי $A \subseteq U$. **המשלים** של הקבוצה A הוא הקבוצה $U \setminus A$ שתסומן על ידי A^c או $\overline{A}$.



תרשים 1.2.3: דיאגרמת ון של המשלים של קבוצה A.

ננסח תחילה כמה תכונות פשוטות של פעולת המשלים.

משפט 1.2.9: תהי $A \subseteq U$ קבוצה כלשהי, אז:
1. $(A^c)^c = A$
2. $A \cap A^c = \emptyset$
3. $A \cup A^c = U$

הוכחה: תרגיל לקוראים. □

וכעת נעבור לשני כללים שימושיים מאוד שנוסחו על ידי אוגוסטוס דה-מורגן.

משפט 1.2.10 (חוקי דה-מורגן): תהיינה $A,B \subseteq U$ קבוצות, אז:
1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

הוכחה: נוכיח לדוגמה את חוק דה-מורגן השני $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$. גם הפעם נוכיח הכלה לשני הכיוונים.

נראה תחילה ש- $(A\cup B)^c \subseteq A^c\cap B^c$: יהי $x\in(A\cup B)^c$. לכן לפי הגדרת פעולת המשלים $x\notin(A\cup B)$.
ולכן לפי הגדרת פעולת האיחוד $x\notin A$ וגם $x\notin B$. לכן שוב לפי הגדרת המשלים, $x\in A^c$ וגם $x\in B^c$.
כלומר, $x\in A^c\cap B^c$.

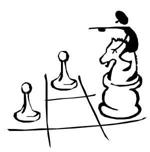
באותו אופן ניתן להראות ש : $A^c\cap B^c \subseteq (A\cup B)^c$, ומכאן שהקבוצות שוות. □

לסיום סעיף זה, נגדיר עוד שתי פעולות חשובות - פעולת החזקה ופעולת המכפלה הקרטזית.

הגדרה 1.2.11: תהי A קבוצה כלשהי. **קבוצת החזקה** של A היא קבוצת כל התת-קבוצות של A.
היא תסומן על ידי $P(A)$.

דוגמה 1.2.12: נחשב את קבוצת החזקה עבור הקבוצות הבאות :
1. תהי $A = \{1,2\}$. אז $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
2. תהי $A = \varnothing$. אז $P(A) = \{\varnothing\}$.
3. תהי $A = \{x,y,z\}$. אז $P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$.

אתגר: אם יש n איברים בקבוצה A, כמה איברים יש בקבוצה $P(A)$? התשובה תינתן במשפט 3.1.4.



נניח כעת שנתון לנו לוח שח וברצוננו לציין באיזו משבצת נמצא הפרש. אנו נציין את מיקומו על ידי ציון הקואורדינטות של שורה ועמודה שבהן הוא נמצא, למשל (שורה 4, עמודה 5). למען האמת, מקובל בשחמט לסמן את העמודות באותיות, אך אנו נלך בדרכנו. בדומה, מושב בבית קולנוע מצוין על ידי מספר שורה, ומספר כיסא באותה שורה. ואילו מיקום בתנ"ך מצוין על ידי שלשה הכוללת את שם הספר, מספר הפרק ומספר הפסוק, למשל (ספר דברים, פרק ה', פסוק י"ז). בדוגמאות אלה עוסקות ההגדרות הבאות.

הגדרה 1.2.13: **זוג סדור** הוא רשימה (a,b) של שני איברים כשהסדר חשוב. **n-יה סדורה** או **סדרה באורך n** היא רשימה $(a_1,a_2,...,a_n)$ כשסדר האיברים חשוב.

שימו לב, הזוג הסדור (a,b) שונה מהזוג הסדור (b,a). לעומת זאת, בקבוצה סדר האיברים אינו חשוב, ולכן $\{a,b\} = \{b,a\}$.

הגדרה 1.2.14: **המכפלה הקרטזית** של שתי קבוצות A ו-B היא הקבוצה של כל הזוגות הסדורים של איבר מ- A ואיבר מ- B :

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

המכפלה הקרטזית של n קבוצות $A_1,A_2,...,A_n$ היא הקבוצה :

$$A_1\times A_2\times...\times A_n = \{(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,...,a_n\in A_n\}.$$

דוגמה 1.2.15: תהיינה $A = \{1,2\}, B = \{a,b,c\}$. אז:

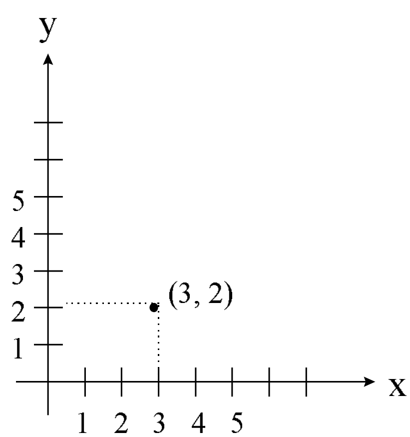
$A\times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$.

ואילו:

$B\times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

במקרה זה אנו רואים אם כן דוגמה לכך ש- $A\times B \neq B\times A$.

דוגמה 1.2.16: תהי $\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים. בתחום הגיאומטריה האנליטית מיוצגת נקודה במישור על ידי זוג קואורדינטות (x,y). הקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ היא קבוצת כל נקודות המישור. ואילו נקודה במרחב התלת-ממדי $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מצוינת על ידי שלשה סדורה (x,y,z). מערכת קואורדינטות כזאת נקראת מערכת **קואורדינטות קרטזיות**, על שם רנה דקרט.



תרשים 1.2.4: מערכת הקואורדינטות הקרטזית.

אתגר: אם בקבוצה A יש n איברים ובקבוצה B יש m איברים, כמה איברים יש בקבוצה $A \times B$?
התשובה תינתן בסעיף 4.1.

כפי שראינו במקרה של קבוצת הנקודות במרחב התלת-ממדי $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, התבוננו במכפלה הקרטזית של הקבוצה $\mathbb{R}$ עם עצמה. במקרה שמדובר במכפלה קרטזית של קבוצה עם עצמה נוהגים להשתמש בסימון המקוצר הבא.

סימון: תהי A קבוצה. נוהגים לסמן את המכפלה הקרטזית $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n}$ גם על ידי A^n.

דוגמה 1.2.17: אם $A = \{0,1\}$ אז הקבוצה $\{0,1\}^n$ כוללת את כל הסדרות באורך n הבנויות מ- 0 ו- 1. כך למשל, אם $n = 3$ אז הקבוצה $\{0,1\}^3$ כוללת את שמונה הסדרות $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

תרגילים

1. תהיינה $A = \{1,3,5,7\},\ B = \{1,2,4,5,6\},\ C = \{2,4,6,8\}$, כאשר הקבוצה האוניברסלית לצורך הדיון היא $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
   א. מצאו את איברי הקבוצות הבאות: $\varnothing^c, U^c, C^c, A \setminus B, B \setminus A, B\cap C, A\cup B$.
   ב. מצאו את איברי הקבוצות הבאות: $(A\cup B) \setminus C,\ (A\cup B)^c\cap(B\cup C)^c,\ (A\cup C) \setminus (C\setminus A)^c$.

2. תהיינה $A = \{1,2\},\ B = \{a,b,c\}$. מצאו את איברי הקבוצות: $A\cup(B\times A),\ (A\times A)\cup(B\times A)$.

3. חשבו את קבוצת החזקה של הקבוצות הבאות:
   א. $A = \{a,b\}$.
   ב. $B = \{a,b,c\}$.
   ג. $C = \{\varnothing, 0, \{0\}\}$.

4. תהיינה $A\subseteq B,\ C\subseteq D$.
   א. האם $(A\cup C) \subseteq (B\cup D)$?
   ב. האם $(A\cap C) \subseteq (B\cap D)$?

5. תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. שכנעו את עצמכם בעזרת דיאגרמות ון והוכיחו בצורה פורמלית כי:
   א. $A\cap(A\cup B) = A$.
   ב. $A\cup(A\cap B) = A$.

6. א. נתונות הקבוצות $A_1,A_2,\ldots,A_n$. הוכיחו שאם $A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n$ אז:
   $$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n.$$
   ב. נתונות הקבוצות: $A_i = \{-i,-i+1,\ldots,i\}$ עבור $i = 1,2,3,\ldots,100$. מצאו מהן הקבוצות:
   $$\bigcup_{i=1}^{100} A_i, \qquad \bigcap_{i=1}^{100} A_i.$$

7. תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. נגדיר את **ההפרש הסימטרי** של A,B כקבוצת כל האיברים ששייכים ל-A או ל-B אבל לא לשתיהן. נסמן את ההפרש הסימטרי על ידי $A\oplus B$.
   א. הוכיחו ש- $A\oplus B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B) \setminus (A\cap B)$.
   ב. הוכיחו או הפריכו (כזכור, כדי להפריך טענה השימוש בדיאגרמות ון מותר וגם יעיל):
   $$A\oplus(B\cap C) = (A\oplus B)\cap(A\oplus C)$$
   $$A\oplus(B\cup C) = (A\oplus B)\cup(A\oplus C)$$
   $$A\oplus(B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C$$
   $$A\cap(B\oplus C) = (A\cap B) \oplus (A\cap C)$$
   $$A\cup(B\oplus C) = (A\cup B) \oplus (A\cup C)$$

8. תהיינה X, Y קבוצות כלשהן. הוכיחו ש- $X\times Y = Y\times X$ אם ורק אם $X = \varnothing$ או $Y = \varnothing$ או $X = Y$.

9. תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $X\cup(Y\times Z) = (X\cup Y) \times (X\cup Z)$.
   ב. $(X\times X) \setminus (Y\times Z) = (X\setminus Y) \times (X \setminus Z)$.
   ג. $(X\times X) \cup (Y\times Z) = (X\cup Y) \times (X \cup Z)$.
   ד. $X \times (Y\cup Z) = (X\times Y) \cup (X\times Z)$.

1.3. יחסים בינאריים

הנושאים שיוצגו: *יחס בינארי, ייצוג יחס על ידי גרף ומטריצה, תכונות של יחסים - רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות, אנטי-סימטריות. יחס שקילות, מחלקת שקילות, חלוקה מושרית, חלוקה, יחס מושרה, יחס השקילות מודולו m.*

המילה יחס מוכרת לנו בהקשרים רבים, ויחסים רבים מוכרים לנו מחיי היום-יום ומתחום המתמטיקה כאחד. כך למשל אם a,b הם שני מספרים ו- $a < b$ הרי הגדרנו יחס בין a ל- b, והוא היחס "קטן מ...". באופן דומה אם יצחק הוא בנו של אברהם, הרי זה היחס "בן של..." הקיים בין יצחק לאברהם. יחס זה איננו סימטרי, שכן אברהם אינו בנו של יצחק. לעומת זאת אם נאמר ש- $a = b$ הרי גם $b = a$, ולכן יחס השוויון בין שני מספרים הוא יחס סימטרי. דוגמאות אלה עסקו ביחסים בין איברים מאותו טיפוס. דהיינו, היחס בין שני מספרים או היחס בין שני אנשים. אנו מכירים גם יחסים בין איברים מקבוצות שונות. למשל, אם הסטודנט הצליח בבחינה, אז מתקיים היחס "הצליח ב..." בין הסטודנט לבחינה, וכמובן שבמקרה זה אין שום היגיון בדיון ביחס שבין הבחינה לסטודנט. בכל אלה עוסק סעיף זה שמגדיר פורמלית את מושג היחס הבינארי ודן בתכונותיהם של יחסים, כמו למשל תכונת הסימטריות שהוזכרה כאן.

הגדרה 1.3.1: תהיינה A,B שתי קבוצות. קבוצה $R\subseteq A\times B$ נקראת ***יחס בינארי*** מ-A ל-B.
אם $A = B$, דהיינו $R\subseteq A\times A$ אז R נקרא גם ***יחס ב- A*** (או ***יחס על A***).
אם $(a,b)\in R$ נאמר ש-a **מתייחס** ל-b ונסמן זאת גם על ידי aRb.

שימו לב שהעובדה ש- $(a,b)\in R$ אינה אומרת שבהכרח גם $(b,a)\in R$. כמו-כן בהחלט ייתכנו זוגות $(a,b)\in A\times B$ כך ש- $(a,b)\notin R$.

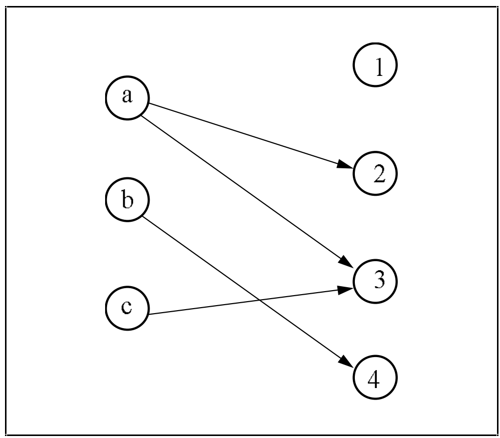
דוגמה 1.3.2: תהיינה $B = \{$לאה, יפה$\}$, $A = \{$דני, משה, יוסי$\}$ שתי קבוצות.
נגדיר את היחס $R \subseteq A\times B$ כיחס "אוהב את", כלומר $(a,b)\in R$ אם a אוהב את b, ונניח כי:
$R = \{$(יפה, משה), (לאה, יוסי), (יפה, יוסי)$\}$.
שימו לב, שאנחנו מייחסים ליחס R את המשמעות של "אוהב את". משמעות זו אינה חלק מההגדרה המתמטית של יחס בינארי, ואפשר היה לייחס לאיברים שביחס R גם את המשמעות "שונא את"... כמו-כן העובדה שיוסי אוהב גם את יפה וגם את לאה אינה מפריעה, לפחות לא על פי ההגדרה המתמטית.

דוגמה 1.3.3: תהי A קבוצת כל בני ישראל בכל הדורות. נגדיר את היחס $R \subseteq A \times A$ כאוסף כל הזוגות הסדורים (a,b) כך ש-a "בן של" b. כך למשל $(\text{אברהם, יצחק}) \in R$, וכן $(\text{יצחק, יעקב}) \in R$. (עיינו בראשית פרק כ"א פסוק ד', בראשית פרק כ"ה פסוק כ"ו).

ייצוג יחס בעזרת גרף מכוון

לעתים נצייר את היחס בעזרת **גרף מכוון** שיכלול **קדקודים** (נקודות) **וצלעות** (חצים). אם $R \subseteq A \times B$ יחס כלשהו, אז קדקודי הגרף יהיו איברי הקבוצות A,B, ותהיה צלע מכוונת מקדקוד a לקדקוד b אם $(a,b) \in R$.

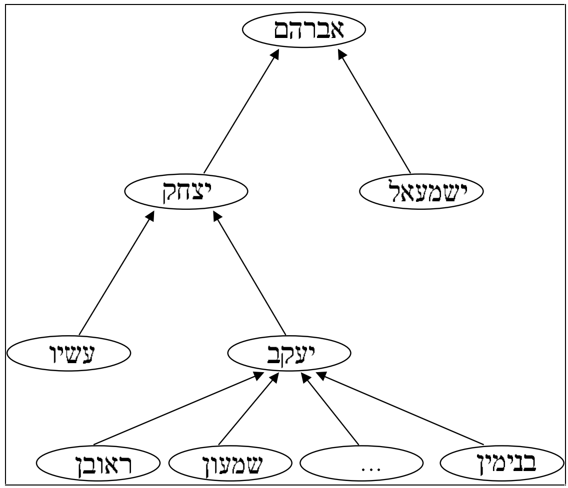
דוגמה 1.3.4: תהיינה $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ קבוצות. נגדיר את היחס R מ-A ל-B על ידי $R = \{(a,2), (a,3), (b,4), (c,3)\}$. ניתן להדגים את היחס R בעזרת הגרף המכוון שבתרשים **1.3.1**.



תרשים 1.3.1: היחס $R = \{(a,2), (a,3), (b,4), (c,3)\}$.

אם $R \subseteq A \times A$ אז קדקודי הגרף יהיו איברי הקבוצה A (לכל איבר מתאים קדקוד יחיד), ושוב תהיה צלע מכוונת מקדקוד a_1 לקדקוד a_2 אם $(a_1,a_2) \in R$. תיתכן גם צלע מקדקוד a לעצמו אם $(a,a) \in R$. צלע כזאת תיקרא **לולאה**. דיון מלא יותר בתורת הגרפים ובמושג הגרף יוצג בפרק 5.

דוגמה 1.3.5: נשוב אל היחס $R \subseteq A \times A$ המוגדר כאוסף כל הזוגות הסדורים (a,b) כך ש-a "בן של" b, כאשר A קבוצת כל בני ישראל בכל הדורות. ניתן לייצג חלק קטן מהיחס בעזרת הגרף המכוון שבתרשים 1.3.2.



תרשים 1.3.2: חלק קטן מהיחס "בן של".

ייצוג יחס בעזרת מטריצה

דרך נוספת לייצג יחס בינארי בדרך ציורית היא לרשום את איברי היחס בטבלה דו-ממדית הנקראת גם **מטריצה**. יהי $R\subseteq A\times B$ יחס כלשהו, ונניח כי $A = \{a_1,a_2,...,a_n\}$ ואילו $B = \{b_1,b_2,...,b_m\}$. הטבלה המייצגת את היחס R תהיה בנויה מ- n שורות ו- m עמודות. נרשום 1 במשבצת הנמצאת בשורה ה- i ובעמודה ה- j אם $(a_i,b_j)\in R$, אחרת נרשום במשבצת זו 0. טבלה כזאת נקראת גם מטריצה של $\{0,1\}$.

דוגמה 1.3.6: נתבונן שוב ביחס $R = \{(a,2), (a,3), (b,4), (c,3)\}$ המוגדר מהקבוצה $A = \{a,b,c\}$ לקבוצה $B = \{1,2,3,4\}$. המטריצה המייצגת יחס זה תכיל 3 שורות ו- 4 עמודות ותיראה כך:

	1	2	3	4
a	0	1	1	0
b	0	0	0	1
c	0	0	1	0

דוגמה 1.3.7: במקרה שמדובר על יחס בינארי בקבוצה כלשהי A, למשל היחס $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\}$ המוגדר על הקבוצה $A = \{1,2,3\}$, תהיה המטריצה ריבועית, כלומר מספר השורות יהיה שווה למספר העמודות. הנה המטריצה המתאימה:

	1	2	3
1	1	1	0
2	1	0	0
3	0	0	1

תכונות של יחסים

נעבור למספר תכונות מרכזיות של יחסים בינאריים.

הגדרה 1.3.8: יהי R יחס בקבוצה A. אומרים ש:

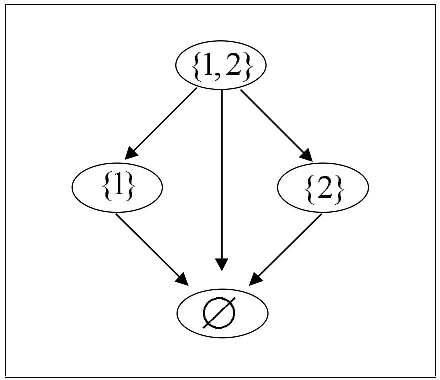
1. R **רפלקסיבי** אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$.
2. R **אנטי-רפלקסיבי** אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\notin R$.
3. R **סימטרי** אם לכל $a,b\in A$, אם $(a,b)\in R$ אז בהכרח $(b,a)\in R$.
4. R **אנטי-סימטרי** אם לכל $a,b\in A$, אם $(a,b)\in R$ וגם $(b,a)\in R$ אז בהכרח $a = b$.
5. R **טרנזיטיבי** אם לכל $a,b,c\in A$, אם $(a,b)\in R$ וגם $(b,c)\in R$ אז בהכרח $(a,c)\in R$.

תכונות אלה משתקפות יפה בגרף ובמטריצה של היחס R, כפי שמסכמת הטבלה הבאה.

תכונה	ייצוג בגרף	ייצוג במטריצה
R רפלקסיבי	יש לולאה בכל קודקוד בגרף.	יש 1 לאורך האלכסון הראשי.
R אנטי-רפלקסיבי	אין לולאות בגרף.	יש 0 לאורך האלכסון הראשי.
R סימטרי	לכל זוג קדקודים a,b, או שיש צלע מ-a ל-b וצלע מ-b ל-a או שאין בכלל צלע ביניהם. אולם לא תיתכן צלע מ-a ל-b בלי הצלע ההפוכה.	בשתי המשבצות (a,b) ו- (b,a) יש 1, או שבשתיהן יש 0.
R אנטי-סימטרי	לכל זוג קדקודים שונים a,b, יש לכל היותר צלע אחת שמחברת ביניהם.	לכל a,b שונים, אסור שגם במשבצת (a,b) וגם במשבצת (b,a) יהיה 1.
R טרנזיטיבי	לכל שלושה קדקודים a,b,c, קיומה של צלע מ-a ל-b ושל צלע מ-b ל-c, גורר גם את קיומה של צלע ישירה מ-a ל-c.	אם המשבצות (a,b) ו- (b,c) מסומנות ב- 1, אז גם המשבצת (a,c) מסומנת ב- 1.

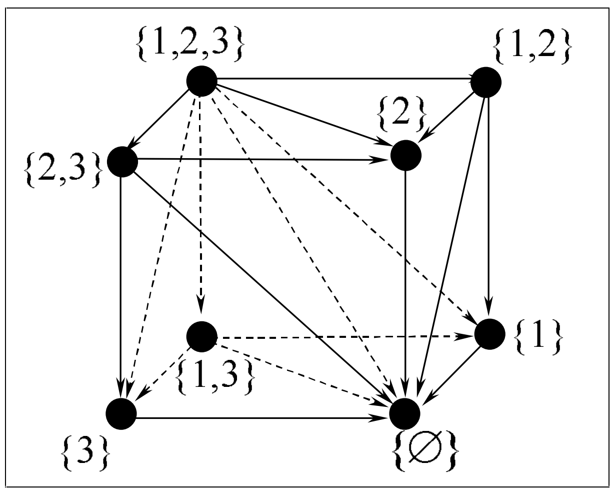
דוגמה 1.3.9: תהי A קבוצת כל בני ישראל (כמקודם). נגדיר את היחס R_1 כקבוצת כל הזוגות הסדורים (a,b) כך ש-a "צאצא של" b. אז R_1 יחס אנטי-רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי. היחס R_1 איננו רפלקסיבי ואיננו סימטרי. לעומת זאת היחס R_2 המוגדר על ידי a "בן של" b אינו טרנזיטיבי.

דוגמה 1.3.10: תהי $A = \{1,2\}$ קבוצה ונגדיר יחס $R = \{(X,Y) \mid X,Y\in P(A),\ Y\subsetneqq X\}$. היחס R הוא יחס על קבוצת החזקה P(A) של A. כלומר, זהו יחס בין תת-קבוצות של הקבוצה A, וזוג קבוצות כלשהו (X,Y) שייך ליחס אם Y מוכלת ממש ב- X. נצייר את הגרף של היחס R.



תרשים 1.3.3: יחס "ההכלה ממש" בין תת-קבוצות של {1,2}.

ניתן לראות מהגרף בתרשים 1.3.3 שהיחס R הוא אנטי-רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי. היחס R אינו רפלקסיבי ואינו סימטרי. אם לעומת זאת נניח כי הקבוצה היא $A = \{1,2,3\}$ והיחס R מוגדר באותו אופן נקבל את הגרף שבתרשים 1.3.4.



תרשים 1.3.4: יחס "ההכלה ממש" בין תת-קבוצות של {1,2,3}.

אתגר: כמה קדקודים יש בגרף שבתרשים 1.3.4? כמה צלעות? נסו לפתור את הבעיה מבלי לספור במפורש את מספר הצלעות והקדקודים שבציור. הכלילו תשובתכם כש- $A = \{1,2,...,n\}$.

יחסים מיוחדים

תהי A קבוצה לא ריקה כלשהי. להלן כמה דוגמאות של יחסים ב- A.

- **היחס הריק** $\varnothing$ הוא יחס אנטי-רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי, טרנזיטיבי, אך אינו רפלקסיבי.
- **יחס הזהות** $I_A = \{(a,a) \mid a\in A\}$ הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי. הוא אינו יחס אנטי-רפלקסיבי.
- **היחס המלא** $S = A\times A$ הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. הוא אינו אנטי-רפלקסיבי. כמו כן ניתן להוכיח ש-S אנטי-סימטרי אם ורק אם ב-A יש בדיוק איבר אחד.

מדוגמאות אלה ניתן לראות שאם A קבוצה לא ריקה, אז יחס כלשהו ב- A אינו יכול להיות רפלקסיבי ואנטי-רפלקסיבי כאחד. דבר זה ברור מההגדרות. לעומת זאת, ראינו שיחס הזהות הוא סימטרי ואנטי-סימטרי כאחד. ננסח ונוכיח כעת קריטריון מדויק שמראה שהיחסים היחידים שיכולים להיות סימטריים ואנטי-סימטריים כאחד, חייבים להכיל רק זוגות מהצורה (a,a) (אם כי אינם חייבים להכיל את כל הזוגות מהצורה (a,a)).

משפט 1.3.11: יהי R יחס כלשהו על A. היחס R סימטרי ואנטי-סימטרי אם ורק אם $R \subseteq I_A$.

הוכחה: נניח תחילה ש-R יחס סימטרי ואנטי-סימטרי כאחד, ונראה ש- $R \subseteq I_A$. יהי $(a,b)\in R$. היחס R סימטרי ולכן גם $(b,a)\in R$. אולם R אנטי-סימטרי ולכן $a = b$. כלומר, $(a,b) = (a,a)\in I_A$ ולכן $R \subseteq I_A$.

נניח כעת ש- $R \subseteq I_A$. אולם אז ברור מההגדרות ש-R סימטרי ואנטי-סימטרי. □

יחסי שקילות

נעבור כעת לסוג מיוחד של יחסים שנקראים יחסי שקילות. נראה בהמשך שיחסים אלה מחלקים את הקבוצה שבה הם מוגדרים לקבוצות של איברים "השקולים" זה לזה, כלומר איברים שלהם תכונה משותפת כלשהי המוגדרת על פי היחס.

הגדרה 1.3.12: יהי R יחס בקבוצה A. אם R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, אז R נקרא ***יחס שקילות*** ב- A.

לכל $a\in A$ נגדיר את **מחלקת השקילות של a** על פי היחס R כקבוצה $\mathbf{[a]_R} = \{b\in A \mid (a,b)\in R\}$.

קבוצת כל מחלקות השקילות של יחס שקילות R נקראת **החלוקה המושרית** על ידי R.

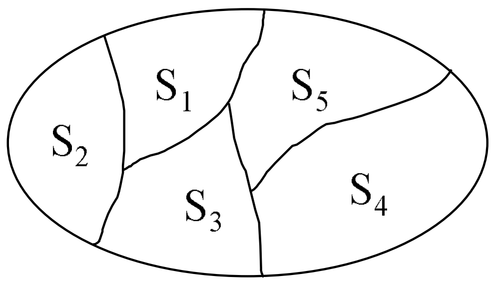
דוגמה 1.3.13: תהי A קבוצת כל תושבי ישראל. נגדיר את היחס R כקבוצת כל הזוגות הסדורים (a,b) כך של- a יש אותו צבע עיניים כמו ל- b. ברור ש-R הוא יחס סימטרי, רפלקסיבי וטרנזיטיבי, ולכן יחס שקילות. מחלקת השקילות של אדם כלשהו a, היא כל האנשים בעלי אותו צבע עיניים כמו של a. לכן היחס R מחלק את תושבי ישראל למחלקות שקילות על פי צבע עיניהם. כלומר, קבוצת כחולי העיניים, קבוצת בעלי העיניים הירוקות, החומות, האדומות וכו'.

דוגמה 1.3.14: היחס $R = \{(a,b) \mid a,b\in \mathbb{N}$,$a+b$ זוגי$\}$ המוגדר על קבוצת המספרים הטבעיים הוא יחס שקילות. בדקו! היחס R מחלק את המספרים הטבעיים לשתי מחלקות שקילות. האחת כוללת את המספרים הזוגיים והשנייה את המספרים האי-זוגיים.

כפי שראינו מהדוגמאות האחרונות, מחלקות השקילות של יחס שקילות כלשהו R הפועל על קבוצה A, מחלקות את הקבוצה A לתת-קבוצות זרות זו לזו שאיחודן מכסה את הקבוצה A כולה. עובדה זו איננה מקרית.

הגדרה 1.3.15: תהי A קבוצה לא ריקה. משפחה S של קבוצות היא **חלוקה** של A אם:

1. $S_i \neq \emptyset$ לכל קבוצה $S_i \in S$.
2. הקבוצות ב- S **זרות זו לזו**: $S_i \cap S_j = \emptyset$ לכל שתי קבוצות $S_i, S_j \in S$ כאשר $i \neq j$.
3. הקבוצות ב- S **מכסות** את A: $A = \bigcup_{S_i \in S} S_i$.



תרשים 1.3.5: חלוקה של הקבוצה A ל- 5 קבוצות.

בדוגמאות שהובאו לעיל אין זה מקרה שיכולנו, למשל, לחלק את קבוצת תושבי ישראל לחלקים בהתאם ליחס השקילות "בעלי אותו צבע עיניים". התופעה הזו היא כללית, כי מתברר שחלוקה ויחס שקילות הם למעשה שני שמות לאותו המושג, כפי שנוכיח בשני המשפטים הבאים.

משפט 1.3.16: יהי R יחס שקילות בקבוצה לא ריקה A. אז קבוצת כל מחלקות השקילות של R היא חלוקה של A.

הוכחה: נראה תחילה שאין ל- R מחלקות שקילות ריקות. ואמנם, לכל $a \in A$ מתקיים $(a,a) \in R$, כי R רפלקסיבי. כלומר $a \in [a]_R$ ולכן, $[a]_R \neq \emptyset$.

כעת נראה שכל שתי מחלקות שקילות שונות אכן זרות זו לזו. כדי להוכיח זאת נראה שאם $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ אז $[x]_R = [y]_R$. כלומר, אם לשתי מחלקות יש איברים משותפים כלשהם, הן בהכרח זהות. לשם כך נראה תחילה ש- $(x,y),(y,x) \in R$, ומכך נסיק בהמשך בקלות ש- $[x]_R = [y]_R$ כדרוש.

נניח אם כן ש- $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. לכן, קיים $a \in A$ כך ש- $a \in [x]_R \cap [y]_R$. לפי הגדרת מחלקת השקילות, $(x,a) \in R$, $(y,a) \in R$. אולם R יחס סימטרי ולכן גם $(a,x) \in R$. ראינו ש- (y,a), $(a,x) \in R$, ולכן בגלל הטרנזיטיביות של R גם $(y,x) \in R$. מכיוון ש- R סימטרי גם $(x,y) \in R$.

עתה נראה שאם $(x,y),(y,x) \in R$, אז אכן $[x]_R = [y]_R$. נוכיח תחילה ש- $[x]_R \subseteq [y]_R$. יהי $z \in [x]_R$. לכן, $(x,z) \in R$. אולם $(y,x) \in R$, ולכן בגלל הטרנזיטיביות של R גם $(y,z) \in R$. כלומר $z \in [y]_R$. באופן דומה מראים ש- $[y]_R \subseteq [x]_R$. מכאן $[x]_R = [y]_R$.

נותר להראות שמחלקות השקילות השונות של R מכסות את A. כלומר, צריך להראות שלכל $a\in A$ קיימת מחלקה כלשהי המכילה אותו. ואכן, לכל $a\in A$ מתקיים $a\in[a]_R$ כי R רפלקסיבי. כלומר $\bigcup_{a\in A}[a]_R = A$. □

ראינו שכל יחס שקילות משרה חלוקה של הקבוצה עליה הוא פועל. גם ההיפך נכון - חלוקה של קבוצה כלשהי, מגדירה באופן טבעי יחס שקילות על קבוצה זו.

הגדרה 1.3.17: תהי A קבוצה לא ריקה ותהי S חלוקה כלשהי של A. ***היחס המושרה*** על ידי החלוקה S הוא היחס R שמוגדר על ידי $(x,y)\in R$ אם ורק אם x,y שייכים לאותה קבוצה S_i בחלוקה S.

משפט 1.3.18: תהי A קבוצה לא ריקה ותהי S חלוקה כלשהי של A. אז היחס R המושרה על ידי S הוא יחס שקילות ב-A.

הוכחה: נוכיח כי היחס R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, ולכן יחס שקילות.

R רפלקסיבי: יהי $a\in A$. מכיוון ש-S חלוקה אז קיימת קבוצה $S_i\in S$ כך ש: $a\in S_i$, שכן הקבוצות המשתייכות לחלוקה S מכסות את A. לכן ודאי מתקיים $(a,a)\in R$.

R סימטרי: יהיו $a,b\in A$. אם $(a,b)\in R$ אז $a,b\in S_i$ כאשר S_i קבוצה כלשהי בחלוקה S. אבל אז גם $b,a\in S_i$ ולכן $(b,a)\in R$.

R טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c\in A$. אם $(a,b),(b,c)\in R$ אז $a,b\in S_i$ ו- $b,c\in S_j$ כאשר S_i,S_j קבוצות כלשהן בחלוקה S. אולם אז $b\in S_i,S_j$ כלומר $S_i\cap S_j\neq\emptyset$. לכן מכיוון ש-S חלוקה, חייב להתקיים $S_i = S_j$. כלומר $a,b,c\in S_i$ ולכן גם $(a,c)\in R$.

ולכן R יחס שקילות. □

יחס השקילות מודולו m

לסיום הסעיף, נבחן בפירוט את תכונותיו של יחס שקילות חשוב שמקורו בתורת המספרים. ליחס זה יש שימושים רבים במדעי המחשב, בתחום ההצפנה ובתחומים אחרים. נגדיר תחילה פעולה חדשה על מספרים שלמים.

הגדרה 1.3.19: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$, ויהי m מספר טבעי חיובי. נאמר ש- **a שקול ל-b מודולו m** או **a קונגואורנטי ל- b מודולו m**, אם המספר $a-b$ מתחלק במספר m ללא שארית. נסמן זאת על ידי $\mathbf{a \equiv b \ (mod\ m)}$.

הגדרה 1.3.20: יהי $m > 1$ מספר טבעי. ***יחס השקילות מודולו m*** הוא היחס (בין המספרים הטבעיים) הבא:

$$E_m = \{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{Z}, a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)\}.$$

משפט 1.3.21: היחס E_m הוא יחס שקילות ב- $\mathbb{Z}$.

כדי להוכיח את המשפט נוכיח תחילה טענת עזר.

טענה 1.3.22: יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$ ויהי m מספר טבעי חיובי. אז $a \equiv b(\text{mod } m)$ אם ורק אם קיים מספר $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = b + k \cdot m$.

הוכחה: נניח כי $a \equiv b(\text{mod } m)$. לכן לפי ההגדרה, $a-b$ מתחלק ב- m ללא שארית. לכן, קיים מספר שלם $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $(a-b) = k \cdot m$. מכאן, $a = k \cdot m + b$.

ולהיפך, אם $a = b + k \cdot m$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ מספר כלשהו, אז $(a-b) = k \cdot m$. לכן $a-b$ מתחלק ב- m ללא שארית, ולכן $a \equiv b(\text{mod } m)$. □

הוכחת משפט 1.3.21: כרגיל, נוכיח כי היחס E_m רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, ולכן הוא יחס שקילות.

היחס E_m רפלקסיבי כי לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a-a = 0$, והמספר 0 מתחלק בכל מספר חיובי m.

היחס E_m סימטרי כי אם $a \equiv b(\text{mod } m)$, אז לפי טענה 1.3.22 קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = b + k \cdot m$. לכן $b = a - k \cdot m$, ולכן שוב לפי טענה 1.3.22, $b \equiv a(\text{mod } m)$, כי גם $-k \in \mathbb{Z}$.

היחס E_m טרנזיטיבי כי אם $a \equiv b(\text{mod } m)$, אז קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = b + k \cdot m$. כמו כן אם $b \equiv c(\text{mod } m)$, אז קיים $j \in \mathbb{Z}$ כך ש- $b = c + j \cdot m$. לכן, $a = c + (j + k) \cdot m$. ולכן, $a \equiv c(\text{mod } m)$, כי גם $(j+k) \in \mathbb{Z}$ (השתמשנו כאן שוב ושוב בטענה 1.3.22). □

כעת נמצא את מחלקות השקילות של E_m. נפתח בדוגמה. נניח כי $m = 5$. על פי ההגדרה של מחלקת שקילות, אם $a \in \mathbb{Z}$ אז מחלקת השקילות של a היא:

$$[a]_5 = \{b \mid b \in \mathbb{Z}, a \equiv b(\text{mod } 5)\}$$

מהי מחלקת השקילות של 0? לפי טענה 1.3.22, אלו כל המספרים השלמים המתחלקים ב- 5 ללא שארית. לכן,

$$[0]_5 = \{-15,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\}$$

באותו אופן אפשר להראות ש:

$$[1]_5 = \{-14,-9,-4,1,6,11,16,\ldots\}$$
$$[2]_5 = \{-13,-8,-3,2,7,12,17,\ldots\}$$
$$[3]_5 = \{-12,-7,-2,3,8,13,18,\ldots\}$$
$$[4]_5 = \{-11,-6,-1,4,9,14,19,\ldots\}$$

ומה לגבי מחלקת השקילות של המספר 5? מתברר ש- $[0]_5 = [5]_5$. עובדה זו אינה מקרית, ולמעשה ליחס השקילות E_5 יש רק 5 מחלקות שקילות שונות וזרות זו לזו. למעשה הדבר נכון לכל m, כפי שמוכיח המשפט הבא.

משפט 1.3.23: יהי m מספר טבעי חיובי. אז ליחס E_m יש בדיוק m מחלקות שקילות והן $\{[i]_m \mid i = 0,1,2,\ldots,(m-1)\}$.

הוכחה: נראה תחילה שכל אלה הן אכן מחלקות שקילות שונות. ואמנם, יהיו $0 \le i,j \le m-1$ כך ש- $i > j$. המספר $i-j$ הוא מספר חיובי ממש וקטן מ- m, ולכן איננו יכול להתחלק ב- m ללא שארית. לכן $i \not\equiv j(\text{mod } m)$, כלומר i,j אינם קונגוארנטיים מודולו m. הוכחנו לכן שהמחלקות $[i]_m$ ו- $[j]_m$ שונות זו מזו, מפני ש- $j \notin [i]_m$ ו- $i \notin [j]_m$, ואילו $i \in [i]_m$ ו- $j \in [j]_m$.

נראה כעת ש- m המחלקות האלו מכסות את $\mathbb{Z}$, כלומר אלה כל מחלקות השקילות של E_m.
כדי להוכיח זאת נראה שכל מספר $a \in \mathbb{Z}$ שייך לאחת מ-m מחלקות השקילות. יהי $a \in \mathbb{Z}$ ונחלק את a ב- m עם שארית. אם המנה בחלוקה היא k והשארית היא i נקבל: $a = k\cdot m + i$, כאשר $0 \le i \le m-1$. לכן, לפי טענה 1.3.22, $a \equiv i(\bmod\ m)$. מכיוון ש- E_m סימטרי, אז גם $i \equiv a(\bmod\ m)$, ולכן $a\in[i]_m$. □

תרגילים

1. תהי $X = \{a,b,c\}$ ונגדיר את יחס ההכלה S על קבוצת החזקה P(X) על ידי $S = \{(A,B) \mid A,B\in P(X),\ A\subseteq B\}$. מהם איברי S? מה מספרם?

2. יהי R יחס על $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי $R = \{(a,b) \mid a,b\in \mathbb{N},\ b \equiv 0 \ (\bmod\ a)\}$. האם R רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי, טרנזיטיבי? תנו שם אחר ליחס הזה.

3. ציינו לגבי כל אחד מהיחסים הבאים אם הוא יחס שקילות בקבוצה $\{1,2,3,4\}$. אם כן, מצאו את החלוקה המושרית על ידו.
   א. $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1)\}$
   ב. $R_2 = \{(1,2), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

4. נרצה להגדיר יחס שקילות R ב- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, כלומר $R \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. היחס מוגדר באופן הבא:
   $R = \{((m,n),(p,q)) \mid m,n,q,p\in \mathbb{N},\ m+q = n+p \}$.
   א. הוכיחו ש-R יחס שקילות ב-$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
   ב. תארו אילו איברים נמצאים במחלקת השקילות של איבר כלשהו $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, וציינו לאילו מחלקות שקילות שונות מחלק R את $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
   ג. מצאו קשר בין מחלקות השקילות של R לבין המספרים השלמים $\mathbb{Z}$.

5. הוכיחו שהיחס R הבא הוא יחס שקילות ב- $\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$. היחס R מוגדר על ידי (a,b)R(c,d) אם ורק אם $a\cdot d = b\cdot c$. האם תוכלו להסביר את הקשר בין היחס הזה לפעולת הצמצום של מספרים רציונאליים?

6. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי, אנטי-רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות, מצאו את מחלקות השקילות שלו.
   א. $R_1 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N},\ a < b\}$.
   ב. $R_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N},\ a \le b\}$.
   ג. $R_3 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N},\ a = b\}$.

7. תהי A קבוצה ויהי R יחס ב- A.
   R נקרא **יחס מעגלי** אם לכל $x,y,z\in A$ מתקיים שאם $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ אז $(z,x)\in R$.
   R נקרא **יחס משולשי** אם לכל $x,y,z\in A$ מתקיים שאם $(x,y)\in R$ וגם $(x,z)\in R$ אז $(y,z)\in R$.
   הוכיחו או הפריכו:

א. R יחס שקילות אם ורק אם R רפלקסיבי ומעגלי.
ב. R רפלקסיבי ומעגלי אם ורק אם R רפלקסיבי ומשולשי.
ג. R מעגלי אם ורק אם R משולשי.

8. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי, אנטי-רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי או טרנזיטיבי.
א. $R_1 = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}$, m+n זוגי$\}$.
ב. $R_2 = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}$, m+n אי-זוגי$\}$.
ג. $R_3 = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}$, m·n אי-זוגי$\}$.
ד. תהי X קבוצה לא ריקה. אז: $R_4 = \{(A,B) \mid A,B \in P(X),\ \ A \subseteq B\}$.
ה. תהי X קבוצה לא ריקה. אז: $R_5 = \{(A,B) \mid A,B \in P(X),\ \ A \cap B = \varnothing\}$.

9. יהיו S,R שני יחסים בקבוצה לא ריקה A. גם $S \cap R$, $S \cup R$ הם יחסים ב- A. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם S,R רפלקסיביים אז גם $S \cap R$ רפלקסיבי.
ב. אם S,R אנטי-רפלקסיביים אז גם $S \cap R$ אנטי-רפלקסיבי.
ג. אם S,R סימטריים אז גם $S \cap R$ סימטרי.
ד. אם S,R אנטי-סימטריים אז גם $S \cap R$ אנטי-סימטרי.
ה. אם S,R טרנזיטיביים אז גם $S \cap R$ טרנזיטיבי.
ו. אם S,R רפלקסיביים אז גם $S \cup R$ רפלקסיבי.
ז. אם S,R אנטי-רפלקסיביים אז גם $S \cup R$ אנטי-רפלקסיבי.
ח. אם S,R סימטריים אז גם $S \cup R$ סימטרי.
ט. אם S,R אנטי-סימטריים אז גם $S \cup R$ אנטי-סימטרי.
י. אם S,R טרנזיטיביים אז גם $S \cup R$ טרנזיטיבי.
יא. אם S,R יחסי שקילות אז גם $S \cup R$ יחס שקילות.

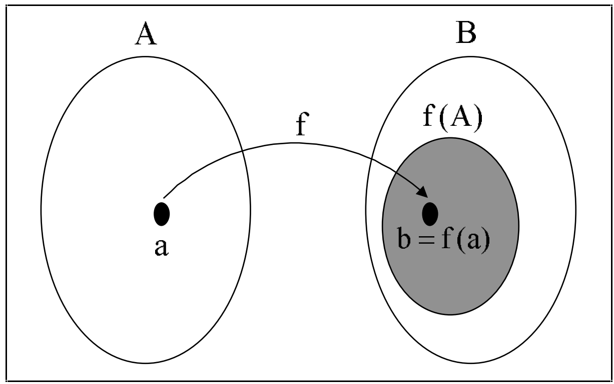
10. הוכיחו שאם R,S יחסי שקילות אז גם $R \cap S$ יחס שקילות. איך ניתן לתאר את יחס השקילות הזה? לדוגמה, הניחו כי R הוא יחס השקילות E_2 (יחס השקילות מודולו 2), ואילו S הוא היחס E_3. מה תוכלו לומר על מחלקות השקילות של היחס $E_2 \cap E_3$?

1.4. פונקציות

הנושאים שיוצגו: *תמונה, מקור, תחום, טווח, פונקציה על, פונקציה חד-חד-ערכית, הרכבה של פונקציות, פונקציה הפיכה ופונקציה הופכית, פונקצית הזהות, פונקציה מציינת, פונקציה בוליאנית.*

אחד המושגים החשובים ביותר במתמטיקה הוא מושג הפונקציה. זהו סוג מיוחד של יחס בינארי, והוא מופיע כמעט בכל תחומי המתמטיקה.

הגדרה 1.4.1 : תהיינה A,B שתי קבוצות. יחס $f \subseteq A\times B$ נקרא **פונקציה מ-A ל-B**, אם לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ אחד ויחיד כך ש- $(a,b)\in f$. במקרה זה נוהגים לסמן **$f:A\to B$**.
אם $(a,b)\in f$ נסמן זאת על ידי **$f(a) = b$**, ונאמר ש- b הוא **התמונה** של a, וכן ש- a הוא **מקור** של b.
הקבוצה A נקראת **התחום** של הפונקציה f. **הטווח** של f הוא קבוצת כל האיברים ב-B שהם תמונה של איבר כלשהו ב-A, והוא יסומן על ידי **f(A)** או **Range(f)**.



תרשים 1.4.1: פונקציה f מ- A ל- B. הטווח באפור.

שימו לב שעל פי ההגדרה של פונקציה לכל איבר בתחום יש תמונה יחידה בטווח, אולם בהחלט ייתכן שלאיבר בטווח יהיו כמה מקורות בתחום.

פונקציות מיוחדות

- תהי X קבוצה כלשהי. הפונקציה $I:X\to X$ המוגדרת על ידי $I(x) = x$ לכל $x\in X$, נקראת **פונקצית הזהות** על X.

- תהי X קבוצה כלשהי, ותהי $A\subseteq X$. נגדיר פונקציה $f_A:X\to\{0,1\}$ על ידי:
$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}.$$
הפונקציה f_A נקראת **הפונקציה המציינת** (או **הפונקציה האופיינית**) של הקבוצה A.

- פונקציה f אשר הטווח שלה כולל רק שני ערכים נקראת פונקציה **בוליאנית**.

תיאור פונקציה בעזרת טבלה

נוח לתאר פונקציות שתחומן סופי על ידי טבלה המתארת את ערכה של הפונקציה בכל אחד מהערכים בתחום. במקרה שהפונקציה היא בוליאנית, כלומר מקבלת רק שני ערכים $\{0,1\}$, נקראת הטבלה גם **טבלת אמת** (בפרק 2 יש דיון נרחב בטבלאות אמת). נתבונן לדוגמה בפונקציה הבאה:

x	f(x)
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

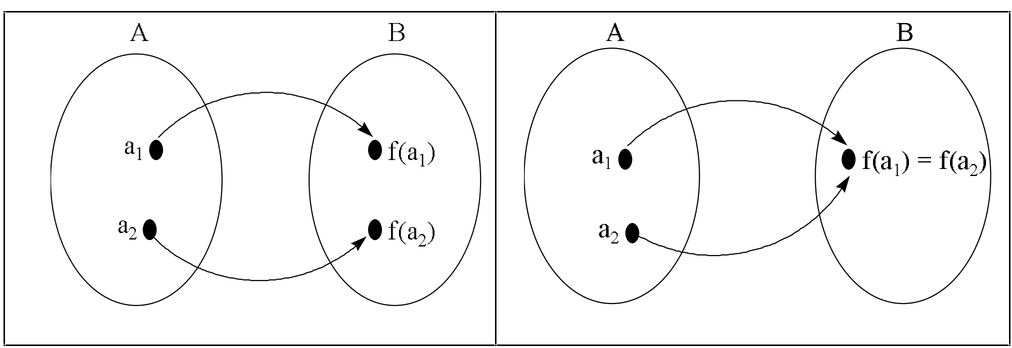
תחומה של הפונקציה היא הקבוצה $A = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ הכוללת את כל שמונה הסדרות באורך 3 הבנויות מאפסים ואחדים. הטווח של הפונקציה הוא כאמור הקבוצה $\{0,1\}$. ניתן לראות מהטבלה ש- $f(x) = 1$ אם מספר האחדים ב- $x \in A$ הוא לפחות 2, ואחרת $f(x) = 0$. פונקציה מסוימת זו נקראת גם **פונקצית הרוב**, שכן ערכה 1 אם הסדרה כוללת יותר אחדים מאפסים.

תכונות של פונקציות

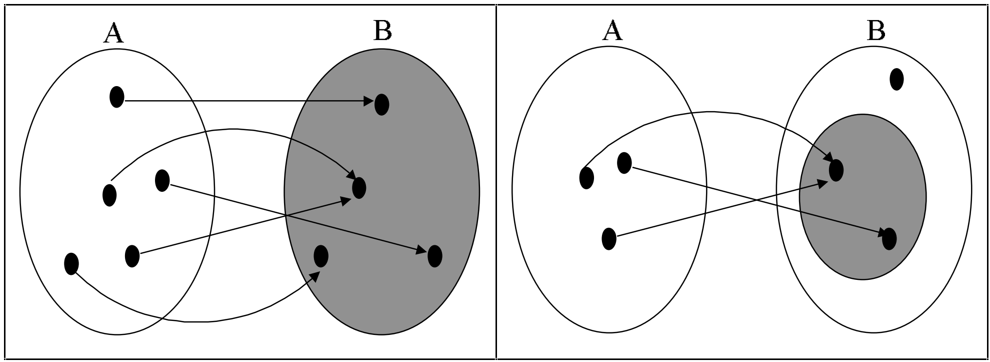
נעבור כעת לתכונות נוספות של פונקציות.

הגדרה 1.4.2: תהיינה A,B קבוצות ותהי $f:A \to B$ פונקציה. הפונקציה f היא **על** אם $f(A) = B$ (הטווח של f הוא כל הקבוצה B), כלומר לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$.
הפונקציה f היא **חד-חד ערכית** (חח״ע או 1:1), אם לכל שני איברים שונים $a_1,a_2 \in A$, מתקיים $f(a_1) \neq f(a_2)$.

ההגדרה הנ״ל של פונקציה חח״ע שקולה להגדרה האומרת ש- f חח״ע אם $f(a_1) = f(a_2)$ גורר בהכרח ש- $a_1 = a_2$. הגדרה חלופית זו תהיה נוחה כדי להוכיח שפונקציה מסוימת היא אכן חח״ע כפי שנראה בדוגמאות הבאות.



תרשים 1.4.2: מימין פונקציה שאינה חח״ע ומשמאל פונקציה חח״ע.



תרשים 1.4.3: מימין פונקציה שאיננה על, ומשמאל פונקציה על.

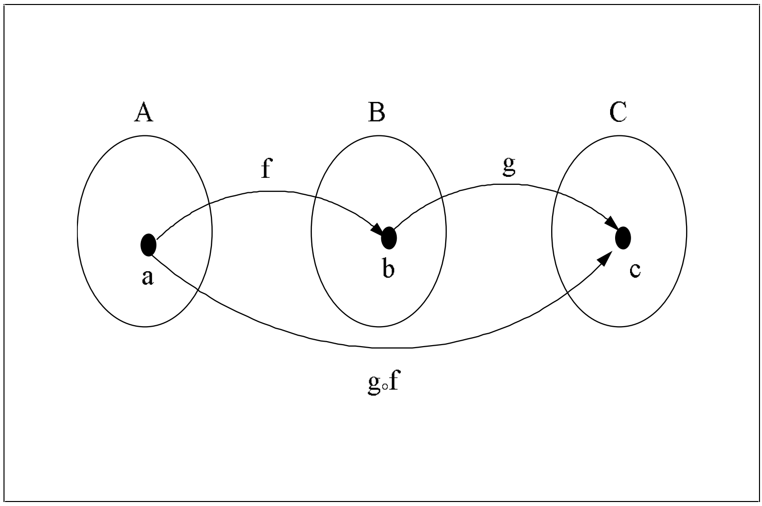
דוגמה 1.4.3: תהי $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = x+1$.
התחום של הפונקציה f הוא $\mathbb{Z}$ וגם הטווח שלה הוא $\mathbb{Z}$.
הפונקציה f על כי לכל $y\in\mathbb{Z}$ קיים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש- $f(x) = y$ (דהיינו $x = y-1$).
הפונקציה f חח״ע כי אם $f(s) = f(t)$ אז $s+1 = t+1$ ולכן גם $s = t$.

נתבונן כעת באותה פונקציה $f(x) = x+1$, אולם הפעם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.
התחום הוא $\mathbb{N}$ ואילו הטווח שלה הוא $\mathbb{N}^+ = \{1,2,3,4,...\}$.
הפונקציה f איננה על כי למספר $0\in\mathbb{N}$ לא קיים מקור בתחום.
הפונקציה f חח״ע כי אם $f(s) = f(t)$ אז $s+1 = t+1$ ולכן $s = t$.

דוגמה 1.4.4: תהי $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$.
התחום הוא $\mathbb{Z}$ ואילו הטווח שלה הוא הקבוצה $\{0,1,4,9,16,25,...\}$.
הפונקציה f איננה על משום שהטווח איננו כולל את המספרים השלמים שאינם ריבוע של מספר שלם. הפונקציה f איננה חח״ע כי למשל $f(2) = f(-2) = 4$.

דוגמה 1.4.5: תהי $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת על ידי $f(x) = 2x$.
התחום הוא $\mathbb{Z}$ ואילו הטווח הוא קבוצת כל המספרים השלמים הזוגיים.
הפונקציה f איננה על כי הטווח איננו כולל את המספרים האי-זוגיים.
הפונקציה f חח״ע כי אם $f(s) = f(t)$ אז $2s = 2t$ ולכן $s = t$.

הגדרה 1.4.6: תהיינה A,B,C קבוצות ותהיינה $f:A\to B$, $g:B\to C$ פונקציות. **ההרכבה** של g ו- f היא הפונקציה $h:A\to C$ המוגדרת על ידי $h(a) = g(f(a))$ לכל $a\in A$. מסמנים זאת על ידי $h = g\circ f$.



תרשים 1.4.4: הרכבה של f ו- g.

דוגמה 1.4.7: תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציות המוגדרות על ידי $f(x) = 4x+3,\ \ g(x) = 2x+5$.
אז:

$$g{\circ}f(x) = g(f(x)) = g(4x+3) = 2(4x+3)+5 = 8x+11,$$
$$f{\circ}g(x) = f(g(x)) = f(2x+5) = 4(2x+5)+3 = 8x+23.$$

הדוגמה הזאת ממחישה שאף אם f,g פונקציות מאותה הקבוצה לעצמה, לא בהכרח $g{\circ}f(x) = f{\circ}g(x)$.

דוגמה 1.4.8: תהי X קבוצת כל בני האדם. תהי $f{:}X\to X$ הפונקציה המוגדרת על ידי "אביו של x" = $f(x)$, ותהי הפונקציה $g:X\to\mathbb{N}$ מוגדרת על ידי "מספר הטלפון של x" = $g(x)$.
אז $g{\circ}f(x)$ הוא מספר הטלפון של אביו של x.

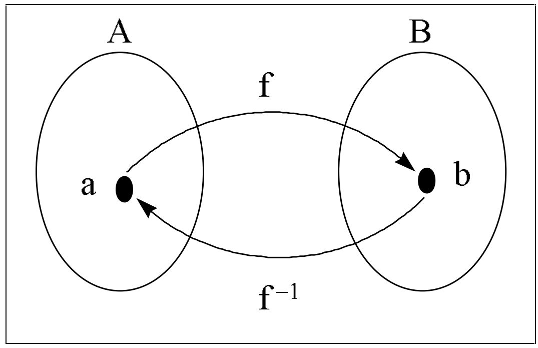
הגדרה 1.4.9: תהיינה A,B קבוצות ותהי $f{:}A\to B$ פונקציה. הפונקציה f **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g{:}B\to A$ כך שלכל $a\in A,\ b\in B$ מתקיים $g{\circ}f(a) = a$ ו- $f{\circ}g(b) = b$. כלומר, $g{\circ}f$ היא פונקצית הזהות על A ואילו $f{\circ}g$ היא פונקצית הזהות על B. הפונקציה g תיקרא **הפונקציה ההופכית** של f.

משפט 1.4.10: תהיינה A,B קבוצות ותהי $f{:}A\to B$ פונקציה הפיכה. אז קיימת ל-f פונקציה הופכית יחידה.
הוכחה: נניח שהפונקציות g,h הן הופכיות ל- f. נראה שבהכרח $g = h$. ואכן, יהי $b\in B$. אז:

$$g(b) = h{\circ}f(g(b)) = h(f(g(b))) = h(f{\circ}g(b)) = h(b)$$

השוויון הראשון נובע מכך ש- $h\circ f$ היא פונקצית הזהות על A, השוויונות השני והשלישי נובעים מהגדרת ההרכבה של פונקציות, ואילו השוויון האחרון נכון כי $f\circ g$ היא פונקצית הזהות על B. הראינו ש- $g(b) = h(b)$ לכל $b\in B$, ולכן $g = h$ כפי שנטען. □

סימון: תהי $f:A\to B$ פונקציה הפיכה. נסמן את הפונקציה ההופכית ל- f על ידי f^{-1}.



תרשים 1.4.5: הפונקציה f והפונקציה ההופכית ל- f.

דוגמה 1.4.11: תהי $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(n) = n-1$.
הפונקציה f הפיכה. הפונקציה ההופכית ל-f היא $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ המוגדרת על ידי $f^{-1}(n) = n+1$.
קל לראות ש- $f^{-1}\circ f(n) = n$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$, וגם $f\circ f^{-1}(n) = n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

דוגמה 1.4.12: תהיינה $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ פונקציות המוגדרות על ידי $f(x) = g(x) = -x$. אז:

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(-x) = x,$$
$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = x.$$

מכאן ש- g ההופכית של f וכמובן גם f ההופכית של g.

ודאי הבחנתם שכל הפונקציות ההפיכות שראינו בדוגמאות למעלה הן גם חח"ע ועל. עובדה זו אינה מקרית, כפי שמראה המשפט הבא.

משפט 1.4.13: תהי $f:A\to B$ פונקציה. הפונקציה f הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל.
הוכחה: נניח תחילה כי f הפיכה, וכי f^{-1} היא ההופכית שלה.
נראה כי f על. יהי $b\in B$. אם $f^{-1}(b) = a$, פירוש הדבר ש- b נמצא בטווח של f, שהרי $f(a) = b$.
עתה נראה ש- f חח"ע. אם $f(s) = f(t)$, אז $s = f^{-1}(f(s)) = f^{-1}(f(t)) = t$ כנדרש.

נניח כעת כי f חח"ע ועל, ונראה כיצד לבנות את הפונקציה ההופכית f^{-1}. יהי $b\in B$. כיצד נגדיר את $f^{-1}(b)$? מכיוון ש- f על, יש $a\in A$ כך ש- $f(a) = b$. מכיוון ש- f חח"ע, תנאי זה מגדיר $a\in A$ יחיד. לכן נגדיר $f^{-1}(b) = a$. קל לבדוק כעת שהפונקציה f^{-1} שהגדרנו היא אכן הפונקציה ההופכית של f. □

תרגילים

1. ציינו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא חח״ע, על או הפיכה. אם הפונקציה הפיכה - מצאו את ההופכית. הוכיחו תשובותיכם!
   א. $f(n) = n^2 + 1$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.
   ב. $f(n) = n^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   ג. $f(n) = n^3 - n$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
   ד. $f(n) = 2^n$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
   ה. תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(n) = n - 1$ אם n אי-זוגי, ו- $f(n) = n + 1$ אם n זוגי.
   ו. תהי A קבוצה כלשהי ותהי $f{:}P(A)\to P(A)$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(B) = A \backslash B$ לכל $B \in P(A)$.

2. תנו דוגמה לפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש:
   א. f חח״ע ולא על.
   ב. f על ולא חח״ע.

3. יהיו $f{:}A\to B$, $g{:}B\to C$ שתי פונקציות חח״ע ועל. הוכיחו ש: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4. תנו דוגמה לקבוצות A,B,C ופונקציות $f{:}A\to B$, $g{:}B\to C$ כך שהפונקציות $g \circ f$, g הן על, ואילו הפונקציה f היא לא על.

5. תהיינה $f{:}A\to B,\ g{:}B\to C$ פונקציות.
   א. הוכיחו שאם f,g חח״ע אז $g \circ f$ חח״ע.
   ב. הוכיחו שאם f,g על אז $g \circ f$ על.

6. יהיו X,Y שתי קבוצות ותהי $f{:}X\to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר פונקציה אחרת $F{:}P(X)\to P(Y)$ על ידי $F(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ לכל $A \in P(X)$.
   א. מהי הקבוצה $F(\varnothing)$?
   ב. האם בהכרח $F(X) \subseteq Y$?
   ג. הוכיחו שאם f חח״ע אז F חח״ע.
   ד. הוכיחו שאם f על אז F על.

1.5. עוצמה של קבוצות

הנושאים שיוצגו: *קבוצה סופית, קבוצה אינסופית, עוצמה של קבוצה סופית, קבוצות שוות עוצמה, קבוצות שקולות, קבוצה בת-מניה, עוצמת הטבעיים, הרציונאליים והממשיים, שיטת האלכסון של קנטור, משפט קנטור, משפט קנטור-ברנשטיין.*

התוצאות שיוצגו בסעיף זה מעניינות בפני עצמן, אולם יש להן גם שימושים רבים בפתרון בעיות מניה, כפי שנראה בפרק 4 הדן בקומבינטוריקה. נדון כעת בקצרה בעוצמתן של קבוצות סופיות

ואינסופיות, ובהשוואה כמותית בין קבוצות. נזכיר כי בספר זה אנו נוקטים בגישה של תורת הקבוצות הנאיבית, ולכן חלק מהתוצאות והמונחים שיוצגו כאן לא יפותחו בצורה פורמלית ומלאה.

אף כי המונחים קבוצה סופית ואינסופית נראים מובנים לכול, נגדיר אותם פורמלית, מכיוון שכפי שנראה בהמשך - לא הכול מובן מאליו כשמדובר בקבוצות אינסופיות.

הגדרה 1.5.1: קבוצה A נקראת **סופית** אם קיים מספר $n \in \mathbb{N}$ כך שמספר איבריה של A הוא n. אחרת A נקראת **אינסופית**.

נרצה לייחס לקבוצות סופיות ואינסופיות "גודל" (המושג הטכני הוא עוצמה). במקרה של קבוצות סופיות אין בכך כל קושי.

הגדרה 1.5.2: ***העוצמה*** של קבוצה סופית A היא מספר האיברים של A, והיא תסומן על ידי $|A|$.

אולם אין טעם להגדרה האחרונה כאשר מדובר בקבוצות אינסופיות. מסתבר שהדרך הנכונה להשגת המטרה היא באמצעות מושג האומר מתי שתי קבוצות (סופיות או אינסופיות) הן "שוות גודל". ודאי שכאשר מדובר בקבוצות סופיות ניתן לספור את איברי שתי הקבוצות, ואם מגיעים לאותה תוצאה אפשר להכריז שהקבוצות "שוות גודל" או שוות עוצמה. אולם שיטה זו תתמשך זמן רב כשמדובר בקבוצות סופיות גדולות, והיא אינה אפשרית כלל כשמדובר בשתי קבוצות אינסופיות. הדרך הנכונה להשוות כמותית את גודלן של שתי קבוצות מוגדרת להלן.

הגדרה 1.5.3: תהיינה A,B קבוצות. נאמר ש- A ו- B **שקולות** אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$. נסמן זאת על ידי $A \sim B$. במקרה זה אומרים גם שהקבוצות A ו- B **שוות עוצמה** ומסמנים זאת על ידי $|A| = |B|$.

באופן ציורי ניתן להסביר זאת כך: נניח שבארון הכלים שלנו יש ספלים ותחתיות. על מנת לברר האם מספרם שווה נתחיל להציב ספלים על תחתיות. אם בסופו של דבר לא נותרו ספלים ולא נותרו תחתיות, נסיק מכך שמספרם שווה. במקרה זה יכולנו כמובן לספור בנפרד את הספלים והתחתיות ולהשוות את המספרים, אבל במקרה האינסופי דווקא השיטה המתאימה ספלים לתחתיות היא זו שתעבוד בהצלחה. נתבונן בשתי דוגמאות נוספות.

דוגמה 1.5.4: הקבוצות $A = \{a,b,c\}$ ו- $B = \{1,2,3\}$ שוות עוצמה. דבר זה ברור כי בשתיהן שלושה איברים, אולם אפשר לראות זאת גם בדרך אחרת. נתאים לכל איבר בקבוצה A איבר שונה בקבוצה B. נתאים ל- a את 1, ל- b את 2 ול- c את 3. מכיוון שלא נותר באף קבוצה איבר שלא הותאם לאיבר מהקבוצה השנייה, הרי עוצמת הקבוצות שווה.

דוגמה 1.5.5: במסיבה משתתפים 20 זוגות נשואים. עוצמת קבוצת הגברים שווה לעוצמת קבוצת הנשים, כי לכל גבר אפשר להתאים את אישתו, וזו כמובן התאמה חח"ע ועל בין קבוצת הגברים לקבוצת הנשים.

השיטה שהוצגה נראית אמנם דרך מוזרה להוכיח שוויון עוצמות אולם היא שימושית כשמדובר בקבוצות גדולות, ובוודאי בקבוצות אינסופיות. מתברר שהיחס ~ שהוצג כעת הוא יחס שקילות ולכן מתאים כדי להשוות בין "גדלים" של קבוצות.

משפט 1.5.6: תהי X קבוצה. היחס ~ המוגדר על קבוצות ב- $P(X)$ הוא יחס שקילות.
הוכחה: עלינו להראות כי היחס ~ הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
היחס רפלקסיבי: תהי $A\in P(X)$. ואמנם, פונקצית הזהות $I:A\to A$ המוגדרת על ידי $I(a) = a$ לכל $a\in A$, היא חח"ע ועל. לכן $A \sim A$.
היחס טרנזיטיבי: תהיינה $A,B,C\in P(X)$. אם $A \sim B$ אז קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$. אם $B \sim C$ אז קיימת פונקציה חח"ע ועל $g:B\to C$. פונקציית ההרכבה $g\circ f:A\to C$ היא חח"ע ועל (בדקו). לכן גם $A \sim C$.
היחס סימטרי: תהיינה $A,B\in P(X)$. אם $A \sim B$, אז קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$. לכן f הפיכה. הפונקציה $f^{-1}:B\to A$ היא גם חח"ע ועל (כי היא הפיכה).
לכן היחס ~ הוא יחס שקילות. □

כפי שכבר ציינו הגדרת היחס ~ נועדה במקורה לאפשר לנו להשוות בין גודלן של קבוצות אינסופיות. אבל יש לברר האם שימרנו את המושג המוכר והידוע של מספר האיברים בקבוצה סופית. המשפט הבא מראה שבמקרה של קבוצות סופיות אכן כך הדבר.

משפט 1.5.7: תהיינה A,B שתי קבוצות סופיות. אז $|A| = |B|$ אם ורק אם $A \sim B$.
הוכחה: ההוכחה מסתמכת על עקרון האינדוקציה המתמטית שבו נדון בפירוט בפרק 3. אם השיטה אינה ידועה לכם, תוכלו לדלג על הוכחה קלה זו. ניגש אם כן להוכחה.
נניח תחילה ש-A,B שוות עוצמה. מכיוון שהן קבוצות סופיות, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $|A| = |B| = n$. נוכיח באינדוקציה על n שקיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$, ולכן A ו- B שקולות.
בסיס האינדוקציה: $n = 1$, כלומר $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. ואכן הפונקציה $f:A\to B$ המוגדרת על ידי $f(a) = b$ היא חח"ע ועל.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לקבוצות שעוצמתן $n \geq 1$ ונוכיח לקבוצות שעוצמתן $n+1$. תהיינה A,B קבוצות סופיות שוות עוצמה, כך ש- $|A| = |B| = n+1$. שתי הקבוצות אינן ריקות, ולכן קיימים $a_1\in A,\ b_1\in B$, ומתקיים $|A\backslash\{a_1\}| = |B\backslash\{b_1\}| = n$. לכן לפי הנחת האינדוקציה יש פונקציה חח"ע ועל $g:A\backslash\{a_1\}\to B\backslash\{b_1\}$. נגדיר פונקציה $f:A\to B$ באופן הבא:

$$f(a) = \begin{cases} g(a), & a \neq a_1 \\ b_1, & a = a_1 \end{cases}.$$

קל לוודא שגם הפונקציה f חח"ע ועל.

נניח כעת שקיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$ ונוכיח ש- $|A| = |B|$. מכיוון ש-A,B סופיות, קיימים שני מספרים טבעיים $n, m\in\mathbb{N}$ כך ש- $|A| = n,\ \ |B| = m$. הפונקציה f חח"ע, ולכן כל שני איברים שונים ב-A מותאמים על ידי f לשני איברים שונים בקבוצה B. לכן מספר האיברים ב- B חייב להיות לפחות גדול כמו מספר האיברים ב- A, כלומר $m \geq n$. מצד שני הפונקציה f היא על, ולכן לכל איבר ב-B יש מקור ב-A. כמו כן, לשני איברים שונים ב- B יש שני מקורות שונים ב- A כי f היא פונקציה. מכאן, מספר האיברים ב- A חייב להיות גדול לפחות כמו מספר האיברים ב- B, כלומר $m \leq n$. משילוב שתי עובדות אלו מקבלים ש- $n = m$ כנדרש. □

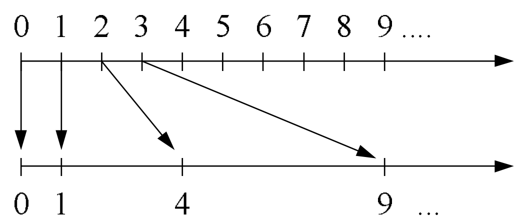
הערה: הוכחת המשפט מסבירה את הקשר בין מספר איברי קבוצה סופית למושג השקילות והעוצמה. אנו אומרים למעשה ש- $|A| = n$ כאשר הקבוצה A שקולה לקבוצה $\{1,2,...,n\}$.

הערה חשובה: המשפט האחרון חשוב גם בבעיות קומבינטוריות ואלגוריתמיות, מכיוון שהוא מאפשר לנו להשוות בקלות יחסית את עוצמתן של קבוצות שיכולות להיות גדולות מאוד. במקום לספור את איבריהן של קבוצות (תהליך שיכול להיות מסובך וארוך), נוכל לפעמים למצוא פונקציה חח״ע ועל ביניהן, וכך נדע שהן שוות עוצמה. באותו אופן נשווה בין עוצמתן של קבוצות אינסופיות.

בקבוצות אינסופיות אנו נתקלים בתופעות שאינן מוכרות לנו בקבוצות הסופיות. למשל, בהינתן שתי קבוצות אינסופיות A,B, ייתכן בהחלט ש- $B \subsetneqq A$ ואף על פי כן $|B| = |A|$, כפי שמדגימות הדוגמאות הבאות.

דוגמה 1.5.8: קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ וקבוצת הטבעיים החיוביים $\mathbb{N}^+$ שקולות שכן הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ המוגדרת על ידי $f(n) = n+1$ היא חח״ע ועל.

דוגמה 1.5.9: האסטרונום הידוע גלילאו הציג את ההתאמה הבאה בין קבוצת הטבעיים לקבוצת הריבועים של מספרים טבעיים. נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{N} \to \{0,1,4,9,16,25,...\}$ המוגדרת על ידי $f(n) = n^2$. ראו תרשים 1.5.1.
ברור ש-f על. כדי להוכיח ש- f חח״ע, יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ מספרים טבעיים שעבורם $f(n) = f(m)$. לכן $n^2 = m^2$. מכיוון ש-n,m אי-שליליים אז $n = m$, ולכן f חח״ע.



תרשים 1.5.1: הפונקציה $f(n) = n^2$.

דוגמה 1.5.10: נראה כעת ש- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, אף כי גם כאן $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z}$. הפונקציה $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ המוגדרת על ידי:

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1, & n \geq 0 \\ -2n-2 & n < 0 \end{cases}$$

היא פונקציה חח״ע ועל. בדקו.

דוגמה 1.5.11: אף כי המספרים הטבעיים הם רק חלק (לכאורה קטן מאוד) מקבוצת המספרים הרציונאליים, נראה ש: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}^+$. במקרה זה קשה יותר לכתוב את הפונקציה במפורש, ולכן

נפעל בדרך עקיפה. מה פירוש הדבר שאנו מתאימים באופן חח״ע ועל בין קבוצה כלשהי A לבין קבוצת המספרים הטבעיים החיוביים $\mathbb{N}^+$? משמעות הדבר היא שיש איבר, נקרא לו a_1 בקבוצה A המותאם לאיבר **1** שב- $\mathbb{N}^+$. כיוצא בזה יש איבר $a_2 \in A$ המותאם לאיבר $2 \in \mathbb{N}^+$, וכן הלאה. יוצא שההתאמה היא חח״ע ועל אם ורק אם בסדרה $a_1, a_2, \ldots$ מופיע כל אחד מאיברי הקבוצה A בדיוק פעם אחת. במקרה שלנו, עלינו להראות אם כן **סידור** של כל המספרים הרציונאליים כך שכל מספר רציונאלי מופיע בדיוק פעם אחת בסידור. נתאר את הסידור בעזרת הטבלה הבאה.

	1	**2**	**3**	**4**	**…**	**n**	**…**
1	1/1	1/2	1/3	1/4		1/n	
2	2/1	2/2	2/3	2/4		2/n	
3	3/1	3/2	3/3	3/4		3/n	
4	4/1	4/2	4/3	4/4		4/n	
⋮							
n	n/1	n/2	n/3	n/4		n/n	
⋮							

המספרים המסומנים בעיגול מתאימים לשברים הרציונאליים המצומצמים, והם ורק הם משתתפים בסדרה של המספרים הרציונאליים. איברי הסדרה מתקבלים על ידי הליכה לאורך האלכסונים של הטבלה, לסירוגין במעלה ובמורד האלכסונים, החל מהפינה השמאלית העליונה. אנו נוסיף מספר רציונאלי לסדרה - אם לא הופיע בה קודם, דהיינו, אם הוא שבר מצומצם. כך למשל, תחילתה של הסדרה תהיה:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \ldots.$$

מהדוגמאות שראינו כעת ומהעובדה שהיחס ~ הוא **יחס שקילות**, נובע שגם $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$ (מדוע?).

הגדרה 1.5.12: קבוצה A נקראת ***בת-מניה*** אם A סופית או אם $A \sim \mathbb{N}$.

עד כה ראינו שהקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ כולן שקולות וכולן בנות-מניה. האם ישנן קבוצות אינסופיות שאינן בנות-מניה? ובכלל האם כל שתי קבוצות אינסופיות שקולות? מסתבר שלא. זו עובדה מפתיעה ביותר. למי שטרם נחשף לתורת הקבוצות, מושג האינסוף נראה מסתורי למדי. העובדה שיש יותר מסוג אחד של אינסוף היא בהחלט בלתי צפויה.

נחזור לרגע לדוגמת הספלים והתחתיות. אם בתום תהליך ההתאמה ביניהם ייוותרו בידינו ספלים, נאמר כמובן שיש יותר ספלים מתחתיות, ולהיפך. אבחנה פשוטה זו היא בסיס להגדרה בעלת ערך כשמדובר בקבוצות אינסופיות.

הגדרה 1.5.13: תהיינה A,B קבוצות אינסופיות. נאמר ש**עוצמתה** של A **קטנה או שווה לעוצמתה** של B, ונסמן זאת על ידי $|\mathbf{A}| \le |\mathbf{B}|$, אם קיימת פונקציה חח״ע $f:A\to B$.
נאמר שעוצמתה של A **קטנה ממש** מעוצמתה של B ונסמן זאת על ידי $|\mathbf{A}| < |\mathbf{B}|$, אם $|A| \le |B|$, אולם לא קיימת פונקציה על מ- A ל- B.

סימון: יהיו a,b שני מספרים ממשיים. נסמן את הקבוצה $\{x \mid x\in \mathbb{R} , a < x < b\}$ על ידי (a,b). הקבוצה $\{x \mid x\in \mathbb{R} , a \le x < b\}$ תסומן על ידי $[a,b)$ ואילו הקבוצה $\{x \mid x\in \mathbb{R} , a \le x \le b\}$ תסומן על ידי $[a,b]$.

שימו לב, כאן הסימון $(0,1)$ מייצג את קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ל- 1, ולא את הזוג הסדור $(0,1)$.

משפט 1.5.14: תהי $(0,1) = \{x \mid x\in \mathbb{R} , 0 < x < 1\}$ קבוצת המספרים הממשיים בין **0** ל- **1**. אז $\left|\mathbb{N}^+\right| < |(0,1)|$.

הוכחה: נציג כל מספר בקבוצה $(0,1)$ בייצוג העשרוני שלו. נשים לב שיש מספרים שלהם שני ייצוגים עשרוניים, כמו המספר $4/5$ המיוצג על ידי $0.8000...$ ו- $0.7999....$. במקרים אלה נבחר בייצוג העשרוני המסתיים בשרשרת אינסופית של 9, ולא בייצוג המתאפס החל ממקום מסוים. נניח בשלילה שהמשפט איננו נכון, כלומר קיימת פונקציה על $f : \mathbb{N}^+ \to (0,1)$. נתבונן בפונקציה f:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots \\
f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots \\
f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n}\dots \\
&\vdots \\
f(n) &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

מטרתנו להראות כעת שפונקציה כזאת אינה יכולה להיות על $(0,1)$. דהיינו נראה שקיים בהכרח מספר $z\in(0,1)$ שאינו מופיע בצדה הימני של רשימה זו. אנו נבנה מספר כזה z במפורש, על ידי כך שנקבע את פיתוחו העשרוני ספרה אחר ספרה. הפיתוח העשרוני של z יהיה $z = 0.z_1z_2...z_n...$, כאשר הספרה ה- n של z תוגדר כך:

$$z_n = \begin{cases} 1, & a_{nn} \ne 1 \\ 2, & a_{nn} = 1 \end{cases}.$$

שימו לב, התכונה העיקרית בהגדרה זו היא שלכל n מתקיים $z_n \ne a_{nn}$.

ברור מהבנייה ש-$z\in(0,1)$, כלומר ש- z מספר ממשי בין 0 ל- 1. עלינו להראות כעת ש- z אינו אחד מן המספרים ...,$f(1),f(2)$ המופיעים בצדה הימני של הרשימה לעיל. נשווה ראשית בין z ל- $f(1)$. שני המספרים האלה שונים כבר בספרה העשרונית הראשונה שלהם, שהרי מתוך הבנייה של z נובע כי $z_1 \neq a_{11}$. מה בדבר $f(2)$? המספרים z ו- $f(2)$ שונים בספרה העשרונית השנייה, שהרי שוב הבנייה של z גוררת כי $z_2 \neq a_{22}$. וכך הלאה, לכל מספר $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $z \neq f(n)$, כי על פי הבנייה $z_n \neq a_{nn}$, ולכן z שונה מ-$f(n)$ בספרה ה- n. לכן, הפונקציה f איננה על, כי z אינו תמונה של אף מספר ב- $\mathbb{N}^+$, וזו כמובן סתירה.
(שימו לב ש- z גם אינו יכול להיות אחד מהמספרים שלהם ייצוג עשרוני כפול, כי מספרים אלה מסתיימים בשרשרת אינסופית של אפסים או של 9, ואילו z בנוי רק מהספרות 1,2.) □

באופן ציורי ניתן לומר שהמספר z נבנה כך שספרותיו לא יתאימו לאלכסון של הרשימה ...,$f(1), f(2), f(3)$ למעלה. לכן נקראת שיטת ההוכחה הזו שיטת **האלכסון של קנטור**, על שמו של קנטור שהמציא אותה. חשיבותה של שיטה זו חורגת בהרבה מעבר לתחום של עוצמות של קבוצות ומופיעה בהוכחות מתמטיות רבות אחרות.

אתגר: מדוע שיטת ההוכחה שתוארה במשפט האחרון לא תצלח להוכיח שעוצמת המספרים הרציונאליים $\mathbb{Q}$ גדולה ממש מהעוצמה של הטבעיים $\mathbb{N}^+$? לכאורה ניתן היה להפעיל אותה גם כאן ולהצליח (ובכך להגיע לסתירה לכך שכבר הוכחנו ש- $\mathbb{N}^+ \sim \mathbb{Q}$).

משפט 1.5.15: עוצמת הקבוצה $(0,1)$ של המספרים הממשיים בין 0 ל- 1, שווה לעוצמת קבוצת כל המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.

הוכחה: הפונקציה $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x)=\frac{1-2x}{x(1-x)}$$

היא פונקציה חח״ע ועל (בדקו), ולכן $|\mathbb{R}|=|(0,1)|$. □

מסקנה 1.5.16: $|\mathbb{N}^+| \lhd |\mathbb{R}|$.

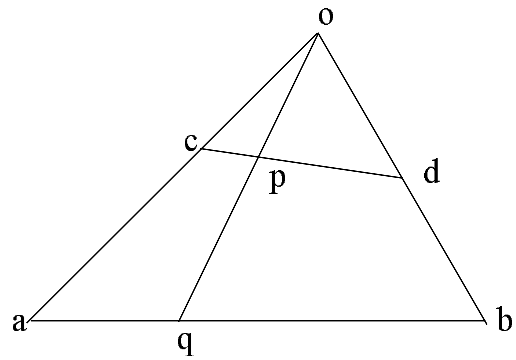
הוכחה: נניח בשלילה ש- $|\mathbb{N}^+|=|\mathbb{R}|$. על פי המשפט האחרון $|\mathbb{R}|=|(0,1)|$. אולם היחס ~ הוא יחס שקילות, ולכן $|\mathbb{N}^+|=|(0,1)|$, וזו סתירה למשפט 1.5.14. מכאן גם $|\mathbb{N}^+| \lhd |\mathbb{R}|$. □

ראינו שיש לפחות שני אינסופים: האינסוף של הטבעיים והאינסוף של הממשיים. נהוג לסמן את עוצמת הטבעיים ב-$\aleph_0$ ואת עוצמת הממשיים ב-$\aleph$ (**עוצמת הרצף**). הוכחנו אם כן כי: $\aleph_0 < \aleph$.

במשפט 1.5.15 הוכחנו שעוצמת המספרים הממשיים שווה לעוצמת קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ל- 1. ניתן למעשה להוכיח שעוצמתם של כל שני קטעים על הישר שווה. נוכיח זאת בדרך גיאומטרית. נסו להוכיח זאת ישירות גם על ידי הצגה מפורשת של פונקציה חח״ע ועל בין שני קטעים כלשהם על הישר.

טענה 1.5.17: לכל שני קטעים על הישר יש אותה עוצמה.

הוכחה: כזכור $[a,b]$ מסמן את הקטע על הישר שכולל את כל המספרים הממשיים בין a ל- b (כולל a,b). נסתכל על שני קטעים $[a,b]$, $[c,d]$ ונצייר אותם במישור באופן הבא.



תרשים 1.5.2: שרטוט של הקטעים $[a,b]$, $[c,d]$ והישר opq החותך אותם.

נתבונן בישר opq החותך את הקטע $[a,b]$ בנקודה q ואת הקטע $[c,d]$ בנקודה p. אם נמשיך ונזיז את הישר opq סביב הנקודה o, נקבל התאמה חח״ע ועל בין נקודות הקטע $[a,b]$ לנקודות הקטע $[c,d]$. □

האם יש רק שני אינסופים? התשובה שלילית. כדי להוכיח זאת נוכיח תחילה את המשפט הבא.

משפט 1.5.18 (קנטור): תהי A קבוצה, אז $|A| < |P(A)|$.

הוכחה: נוכיח תחילה כי $|A| \le |P(A)|$. נגדיר פונקציה $f:A \to P(A)$ על ידי $f(a) = \{a\}$ לכל $a \in A$. הפונקציה f חח״ע ולכן $|A| \le |P(A)|$.

על מנת להראות ש- $|A| < |P(A)|$ יש להראות שאין פונקציה על $g:A \to P(A)$. נניח בשלילה שיש פונקציה על $g:A \to P(A)$. שימו לב שהפונקציה g מתאימה לכל איבר $a \in A$, קבוצה $g(a)$ שהיא תת-קבוצה של A (שהרי $g:A \to P(A)$). הקבוצה $g(a)$ עשויה לכלול את האיבר a ועשויה גם לא לכלול את a כאיבר. נתרכז בסוג השני של איברים ונגדיר קבוצה חדשה:

$$B = \{a \mid a \in A,\ a \notin g(a)\}.$$

הקבוצה B היא תת-קבוצה של A, כלומר $B \in P(A)$. לפי הנחת השלילה הפונקציה g על, כלומר הטווח של g כולל את כל איברי הקבוצה $P(A)$ ובפרט את B. דהיינו, קיים איבר $a_0 \in A$ כך ש- $g(a_0) = B$. נשאל את עצמנו האם a_0 איבר של הקבוצה B או לא.

נניח תחילה ש- $a_0 \in B$. לכן $a_0 \in g(a_0) = B$. אולם לפי הגדרת B, אם $a_0 \in B$ אז $a_0 \notin g(a_0)$, וזה לא ייתכן.

נניח כעת ש- $a_0 \notin B$, כלומר $a_0 \notin g(a_0) = B$. אולם אז לפי הגדרת B מתקיים $a_0 \in B$, וגם זה לא ייתכן. כלומר, לא ייתכן $a_0 \in B$ ולא ייתכן $a_0 \notin B$, וזו כמובן סתירה.

לכן הפונקציה g איננה על, ומכאן $|A| < |P(A)|$ כנדרש. □

ממשפט קנטור נובע ש:

$$|\mathbb{N}| \lhd |P(\mathbb{N})| \lhd |P(P(\mathbb{N}))| \lhd |P(P(P(\mathbb{N})))| < \dots$$

כלומר אין עוצמה מקסימלית. לאחר שהתגברנו על ההפתעה ההתחלתית וגילינו שיש "יותר מאינסוף אחד" (זאת אומרת יותר מעוצמה אינסופית אחת), אנו מגלים אם כן שהמצב עוד מרחיק לכת בהרבה. בעצם יש אינסוף עוצמות אינסופיות השונות זו מזו. מתבקש עתה לברר מיהן כל העוצמות האינסופיות, ומה היחסים ביניהן. למשל, ראינו כי $\aleph_0 < \aleph$. האם יש עוד עוצמות אינסופיות בין $\aleph_0$ ל- $\aleph$? קנטור שיער ב- 1877 שאין עוצמות כאלה, ו- $\aleph$ היא העוצמה האינסופית העוקבת ל- $\aleph_0$. השערה זו נודעה בשם **השערת הרצף**. גרסה מרחיקת לכת עוד יותר של אותה השערה אומרת שאם A קבוצה אינסופית, אז אין עוצמות בין $|A|$ לבין העוצמה של קבוצת החזקה $P(A)$. השערה זו נקראת **השערת הרצף המוכללת**. השערת הרצף הייתה פתוחה שנים רבות עד שקורט גדל הוכיח ב- 1938 שלא ניתן להפריך את השערת הרצף במסגרת תורת הקבוצות הקלאסית. ב- 1963 הוכיח פול כהן שלא ניתן גם להוכיח את השערת הרצף במסגרת זו. כלומר, השערת הרצף אינה ניתנת להפרכה ואינה ניתנת להוכחה במסגרת האקסיומות של תורת הקבוצות! אבל הדיון הזה מוביל הרחק מעבר לגבולות ספר זה.

נציין לסיום ללא הוכחה, משפט שנראה ברור לחלוטין כשמדובר בקבוצות סופיות, אולם הוכחתו אינה טריוויאלית כלל כשמדובר בקבוצות אינסופיות.

משפט 1.5.19 (קנטור-ברנשטיין): תהיינה A,B קבוצות כלשהן. אם $|A| \le |B|$ וגם $|B| \le |A|$, אז $|A| = |B|$.

בעזרת משפט קנטור-ברנשטיין אפשר להוכיח גם שעוצמת הממשיים שווה לעוצמת קבוצת החזקה של המספרים הטבעיים.

משפט 1.5.20: $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N}^+)|$.

הוכחה: נוכיח ש- $|\mathbb{R}| \le |P(\mathbb{N}^+)|$ ו- $|P(\mathbb{N}^+)| \le |\mathbb{R}|$. המשפט ינבע על ידי שימוש במשפט קנטור-ברנשטיין.

כזכור לפי משפט 1.5.15, $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$, ועל ידי שימוש בתרגיל 1 אפשר להסיק כי $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$.

לכן, נראה תחילה כי $|[0,1)| \le |P(\mathbb{N}^+)|$ על ידי כך שנציג פונקציה חח"ע מהקטע $[0,1)$ לאוסף כל התת-קבוצות של הקבוצה $\mathbb{N}^+$. ואכן, נייצג כל מספר ממשי $0 \le x < 1$ בבסיס בינארי, כלומר נרשום את x בעזרת הטור האינסופי הבא:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots,$$

כאשר $a_i \in \{0,1\}$ לכל i. כך למשל המספר 1/3 ייכתב בייצוג בינארי כך:

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots,$$

כאשר במקרה זה $a_i = 0$ אם i אי-זוגי, ו- $a_i = 1$ אחרת. קל לוודא שזה אכן הפיתוח הנכון במקרה זה, כי מדובר בסכום של הטור הגיאומטרי האינסופי הבא:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots=\frac{1}{3}$$

במקרה שלמספר x יש שני ייצוגים שונים, נבחר בייצוג הסופי, כלומר ייצוג שבו מספר ה- a_i השווים ל- 1 הוא סופי. כך למשל, את המספר 1/4 אפשר לכתוב בשתי דרכים בייצוג בינארי. ייצוג אחד הוא:

$$\frac{1}{4}=\frac{0}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\ldots$$

כלומר $a_2 = 1$ ו- $a_i = 0$ לכל $i \neq 2$. הייצוג השני יהיה:

$$\frac{1}{4}=\frac{0}{2^1}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots$$

כלומר $a_1 = a_2 = 0$, ואילו $a_i = 1$ לכל $i > 2$.

במקרה של 1/4 נבחר אם כן בייצוג הראשון שהוא סופי.

אם כך, אפשר לייצג כל מספר $x \in [0,1)$ באופן יחיד בבסיס בינארי. כעת, נתאים למספר x המיוצג בדרך זו את הקבוצה S הבאה:

$$S=\{i\in\mathbb{N}^+ \mid a_i=1\}.$$

כך למשל למספר 1/3 תותאם הקבוצה $\{2,4,6,8,\ldots\}$, ואילו למספר 1/4 תותאם הקבוצה $\{2\}$.

לא קשה לראות שזו אכן פונקציה חח״ע ואנו משאירים זאת כתרגיל לקוראים.

עתה נראה כי $\left|P(\mathbb{N}^+)\right| \le \left|[0,1)\right|$ על ידי כך שנציג פונקציה חח״ע מאוסף כל התת-קבוצות של הקבוצה $\mathbb{N}^+$ לקטע $[0,1)$. תהי $S \in P(\mathbb{N}^+)$ קבוצה כלשהי. נתאים לה את המספר הממשי $x = 0.x_1x_2\ldots x_n\ldots$, כאשר לכל n מתקיים $x_n = f_S(n)$, והפונקציה $f_S : S \to \{0,1\}$ היא הפונקציה המציינת של הקבוצה S המוגדרת כזכור על ידי:

$$f_S(n)=\begin{cases}1, & n\in S\\ 0, & n\notin S\end{cases}.$$

כך למשל לקבוצה $S = \{1,2,4\}$ יותאם המספר הממשי $0.1101000\ldots$. גם במקרה זה לא קשה לוודא שזו אכן פונקציה חח״ע כנדרש. □

כלומר הראינו כעת כי $\aleph = |P(\mathbb{N}^+)| = |\mathbb{R}|$.

תרגילים

1. א. הוכיחו ש: $(0,1) \sim (-1,1)$.
   ב. הוכיחו ש: $(0,1) \sim (a,b)$ לכל שני מספרים $a, b \in \mathbb{R}$ שמקיימים $a < b$.
   ג. הוכיחו ש: $(0,1) \sim [0,1)$.
   הדרכה: היעזרו בסעיף א׳ וכן במשפט קנטור-ברנשטיין.

2. תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. הוכיחו:
   א. אם $A \subseteq B$ אז $|A| \leq |B|$.
   ב. אם $|A| \leq |B| < |C|$ אז גם $|A| < |C|$.

3. א. הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים היא בת-מניה.
   ב. הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים היא בת-מניה.
   ג. תהיינה X_1,Y_1 שתי קבוצות אינסופיות זרות, ותהיינה X_2,Y_2 עוד שתי קבוצות אינסופיות זרות. הוכיחו שאם $X_1 \sim X_2$ וגם $Y_1 \sim Y_2$ אז $X_1 \cup Y_1 \sim X_2 \cup Y_2$.
   ד. הסיקו מסעיפים א,ב,ג שאם X,Y קבוצות אינסופיות זרות ובנות מניה אז גם $X \cup Y$ בת מניה.

4. יהיו X,Y שתי קבוצות בנות מניה.
   א. הוכיחו שכל תת-קבוצה של קבוצה בת-מניה היא בת-מניה.
   ב. הסיקו שהקבוצה $Y \backslash X$ היא בת-מניה.
   ג. השתמשו בעובדה ש- $X \cup Y = X \cup (Y \backslash X)$ כדי להוכיח שגם $X \cup Y$ קבוצה בת-מניה.

5. נגדיר את קבוצת כל הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים על ידי:
   $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, ..., a_n, ...) \mid a_1, a_2, ... \in \mathbb{N}\}$.
   הוכיחו ש- $|\mathbb{N}| < \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.

6. תהי $X \neq \varnothing$ קבוצה כלשהי. נסמן ב-F^X את קבוצת כל הפונקציות מ-X לקבוצה $\{0,1\}$. הוכיחו כי $P(X) \sim F^X$.
   הדרכה: התבוננו בפונקציה $g:P(X) \rightarrow F^X$ המוגדרת על ידי $g(A) = f_A$, כש- f_A הפונקציה המציינת של A.

1.6. קבוצות סדורות

הנושאים שיוצגו: *יחס סדר חלקי, יחס סדר מלא, איבר מינימלי, איבר מקסימלי, קבוצה סדורה היטב, תנאי המינימליות, שרשרת, אנטי-שרשרת, אורך ורוחב של קס״ח, משפט דילוורת׳, דיאגרמת הסה.*

בסעיף זה נדון ביחסים מיוחדים המאפשרים לנו להשוות בין איברי הקבוצה. יחסים כאלה מוכרים לנו, למשל יחס הסדר $\leq$ המוגדר על קבוצת המספרים השלמים. דוגמה חשובה אחרת היא יחס ההכלה $\subseteq$ המוגדר בין תת-קבוצות של קבוצה נתונה. נפתח בהגדרה של יחס סדר וקבוצה סדורה.

הגדרה 1.6.1: יחס בינארי R בקבוצה A נקרא ***יחס סדר חלקי***, אם R רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי. הזוג הסדור (A,R) נקרא **קבוצה סדורה חלקית** (קס״ח). לרוב נסמן יחס סדר על ידי $\leq$ וקבוצה סדורה חלקית על ידי $(A, \leq)$.

הערה: שימו לב שבהגדרה האחרונה הסימון $\leq$ מציין יחס סדר כלשהו, ולאו דווקא היחס "קטן או שווה" המוגדר בין מספרים.

נחזור לרגע לשתי הדוגמאות שכבר ציינו. בעוד שלכל שני מספרים שלמים x,y מתקיים $x \leq y$ או $y \leq x$ (כלומר כל שני מספרים טבעיים ניתנים להשוואה), אין זה המצב כשמדובר ביחס ההכלה בין קבוצות. מובן שיש זוגות של קבוצות A,B שאינן מכילות זו את זו, כלומר $A \not\subset B$ וגם $B \not\subset A$. ההגדרה הבאה עוסקת בכך.

הגדרה 1.6.2: יחס סדר חלקי R נקרא ***יחס סדר מלא*** (או ***יחס סדר ליניארי***) אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $(a,b)\in R$ או $(b,a)\in R$. במקרה זה הזוג (A,R) נקרא ***קבוצה סדורה ליניארית***.

ביחס סדר חלקי ייתכנו איברים שאי-אפשר להשוותם. לעומת זאת, ביחס סדר מלא אפשר להשוות בין כל זוג איברים. נביט במספר דוגמאות המבהירות את ההבדלים בין יחס סדר חלקי ליחס סדר מלא.

דוגמה 1.6.3: היחס $\leq$ ("קטן או שווה") המוגדר על המספרים השלמים הוא כאמור יחס סדר חלקי. הוא גם יחס סדר מלא, שכן לכל שני מספרים שלמים a,b מתקיים $a \leq b$ או $b \leq a$. הזוג הסדור $(\mathbb{Z}, \leq)$ הוא לכן קבוצה סדורה ליניארית.

סימון: יהיו $n, m \in \mathbb{N}^+$ שני מספרים. נסמן $\mathbf{n \mid m}$ אם m מחלק את n ללא שארית.

דוגמה 1.6.4: נתבונן בזוג $(\mathbb{N}^+, |)$ שבו היחס | מוגדר על ידי $n \mid m$, כלומר m מחלק את n ללא שארית. זהו יחס סדר חלקי אך אינו יחס סדר מלא. כך למשל, לא ניתן להשוות בין 2 ל- 3.

דוגמה 1.6.5: יחס חשוב הוא יחס **הרישא** המוגדר בין סדרות. תהי A קבוצה כלשהי, ותהי A^* קבוצת כל הסדרות הסופיות הבנויות מאיברי A.

נתבונן בשתי הסדרות $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,b_2,\ldots,b_m)\in A^*$ הבנויות מאיברי A, כלומר $a_i, b_j \in A$ לכל $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, ונניח ש- $n \leq m$.

נאמר ש- $b \leq_{prefix} a$ אם $a_1 = b_1, a_2 = b_2,\ldots,a_n = b_n$, כלומר הסדרה a היא רישא (התחלה) של הסדרה b. כך למשל, $(7,1,2,4) \leq_{prefix} (7,1,2)$. יחס הרישא הוא יחס סדר חלקי, אך אינו יחס סדר מלא, שכן יש סדרות שאינן מהוות רישא זו של זו. כך למשל, אם $A = \{1,2,3\}$, $a = (1,1,2)$ ואילו $b = (1,3,2)$, אז הסדרה a אינה רישא של b וגם הסדרה b אינה רישא של a. הזוג $(A^*, \leq_{prefix})$ הוא אם כן קס"ח.

דוגמה 1.6.6: נתבונן בזוג $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{lex})$ שבו היחס $\leq_{lex}$ מוגדר על ידי $(a,b) \leq_{lex} (c,d)$ אם $(a \leq c)$ או אם $(a = c$ וגם $b \leq d)$. זהו יחס הדומה לדרך שבה מסודרות המילים במילון או השמות בספר טלפונים, ולכן הוא נקרא יחס הסדר **המילוני** או **הלקסיקוגרפי** על הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. הקס"ח $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{lex})$ היא קבוצה סדורה ליניארית כי ניתן להשוות בין כל שני איברים ב- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

אפשר להרחיב את יחס הסדר המילוני כך שיאפשר להשוות בין שתי סדרות באורך כלשהו של מספרים טבעיים. נתבונן בשתי סדרות $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,b_2,\ldots,b_m)$ כאשר איברי הסדרות הם מספרים טבעיים, כלומר $a_i, b_j \in \mathbb{N}$ לכל $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$.

נאמר ש- $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \le_{lex} (b_1,b_2,\ldots,b_m)$ אם הסדרה a היא רישא של b, או אם ל- a ול- b יש רישא זהה באורך k, כלומר $a_i = b_i$ לכל $i \le k$ ואז $a_{k+1} < b_{k+1}$ (ייתכן גם ש- $k = 0$, ואז פירוש הדבר הוא ש- $a_1 < b_1$). כך למשל, $(9,1,2) \le_{lex} (9,1,3)$.

דוגמה 1.6.7: יחס הסדר המילוני אינו היחס היחיד שאפשר להגדיר על הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. נתבונן למשל ביחס הסדר **הקרטזי** $\le_{Cart}$ המוגדר על הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, שבו $(a,b) \le_{Cart} (c,d)$ אם $a \le c$ וגם $b \le d$. זה אינו יחס סדר מלא כי אי-אפשר למשל להשוות בין (2,3) ל- (3,2), ולכן $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \le_{Cart})$ היא קבוצה סדורה חלקית, אך אינה קבוצה סדורה ליניארית.

פעמים רבות נרצה לדעת מי הם האיברים הקטנים ביותר או הגדולים ביותר בקבוצה סדורה. בהקשר זה, איבר נחשב "קטן ביותר" אם אין איבר אחר שקטן ממנו. כך למשל, ברור לכולנו כי 0 הוא המספר הטבעי הקטן ביותר, אך אין מספר טבעי גדול ביותר. פורמלית נגדיר זאת כך:

הגדרה 1.6.8: תהי $(A, \le)$ קבוצה סדורה חלקית.
איבר $a\in A$ נקרא **מינימלי** ב- A אם לא קיים איבר $b\in A$, $b \ne a$, כך ש- $b \le a$.
איבר $a\in A$ נקרא **מקסימלי** ב- A אם לא קיים איבר $b\in A$, $b \ne a$, כך ש- $a \le b$.

קל לראות שבקבוצה סדורה ליניארית יש לכל היותר איבר מינימלי יחיד ואיבר מקסימלי יחיד. לעומת זאת, בקבוצה סדורה חלקית ייתכנו יותר מאיבר מינימלי אחד ויותר מאיבר מקסימלי אחד. כאמור, יש גם קבוצות סדורות חלקית (אינסופיות) שבהן אין כלל איבר מינימלי או איבר מקסימלי.

דוגמה 1.6.9: נתבונן שוב בקס"ח $(\mathbb{N}^+ \setminus \{1\}, |)$ כפי שהוגדרה בדוגמה 1.6.4, כאשר הפעם אנחנו מתבוננים בקבוצת כל המספרים הטבעיים החיוביים ללא המספר 1, עם היחס "מחלק את". מי הם האיברים המינימליים בקבוצה זו? כל מספר ראשוני הוא איבר מינימלי בקבוצה זו, שכן אם n מספר ראשוני אז לא קיים מספר m השונה מ- n כך ש- $m \mid n$. ולהיפך, כל האיברים המינימליים בקס"ח הם בהכרח ראשוניים.

דוגמה 1.6.10: תהי A קבוצה כלשהי. נתבונן בקבוצה הסדורה $(P(A), \subseteq)$ כאשר $\subseteq$ יחס ההכלה בין תת-קבוצות של A. זהו יחס סדר חלקי אך לא יחס סדר מלא, כי יש תת-קבוצות $X,Y\in P(A)$ שלא ניתנות להשוואה על ידי $\subseteq$. כך למשל, אם $A = \{1, 2, 3\}$, $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3\}$, אז לא מתקיים $X \subseteq Y$ וגם לא $Y \subseteq X$. האיבר המקסימלי היחיד במקרה זה הוא הקבוצה A עצמה, והאיבר המינימלי היחיד הוא הקבוצה הריקה.
נוריד כעת את הקבוצה הריקה מאוסף כל התת-קבוצות של A, ונתבונן בקס"ח $(P(A) \setminus \varnothing, \subseteq)$. קל לראות שהאיברים המינימליים בקבוצה הסדורה הזו הם כל התת-קבוצות של A שמכילות איבר יחיד של A, כלומר: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

דוגמה 1.6.11: נתבונן שוב בקס"ח $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \le_{Cart})$ עם יחס הסדר הקרטזי. כאן קיים איבר מינימלי יחיד והוא (0,0), אולם אין כלל איברים מקסימליים.

כפי שהערנו אין איבר מקסימלי בקס"ח $(\mathbb{N}, \leq)$. ואילו בקס"ח $(\mathbb{Z}, \leq)$ אין גם איבר מינימלי. בעיות כאלה מתעוררות כמובן רק כשעוסקים בקבוצות סדורות אינסופיות ויש להן חשיבות רבה (ראו בהקשר זה תרגיל 2). סוג מיוחד של קבוצות סדורות כולל את הקבוצות הסדורות היטב. על קבוצות אלה ניתן להגדיר את עקרון האינדוקציה המתמטית כפי שנראה בהמשך בפרק 3. נרחיב תחילה את הגדרת המושג של איבר מינימלי בקס"ח לתת-קבוצה כלשהי של קס"ח.

הגדרה 1.6.12: תהיה $(A, \leq)$ קס"ח ותהיה $B \subseteq A$ תת-קבוצה. איבר $x \in B$ נקרא **מינימלי ב- B**, אם לא קיים איבר $y \in B$, $y \neq x$, המקיים $y \leq x$.

הגדרה 1.6.13: קבוצה סדורה חלקית $(A, \leq)$, שבה לכל תת-קבוצה לא ריקה $B \subseteq A$ יש איבר מינימלי אחד ויחיד ב- B, נקראת ***קבוצה סדורה היטב*** (קס"ה).

דוגמה 1.6.14: נתבונן בקבוצה הסדורה ליניארית $(\mathbb{N}, \leq)$ עם יחס הסדר $\leq$ הרגיל המוגדר על המספרים הטבעיים. זו קבוצה סדורה היטב, שכן בכל קבוצה חלקית $B \subseteq \mathbb{N}$ יש איבר מינימלי יחיד ב- B, והוא המספר הקטן ביותר בקבוצה B. עובדה פשוטה זו נקראת האקסיומה של האינדוקציה המתמטית, וממנה ניתן לפתח את עקרון האינדוקציה המתמטית כפי שנראה בהרחבה בפרק 3.

משפט 1.6.15: כל קבוצה סדורה היטב היא קבוצה סדורה ליניארית.

הוכחה: תהי $(A, \leq)$ קבוצה סדורה היטב ויהיו $a,b \in A$ שני איברים כלשהם. נראה שאפשר להשוות ביניהם. מכיוון ש- $(A,\leq)$ קבוצה סדורה היטב, אז בתת-קבוצה $\{a,b\}$ יש איבר מינימלי יחיד, נניח a. לכן b אינו מינימלי, ולכן $a \leq b$, כלומר אפשר להשוות בין a,b (אחרת, אם לא היה מתקיים $a \leq b$, אז גם b היה מינימלי בתת-קבוצה $\{a,b\}$, וזה היה בסתירה לכך שבתת-קבוצה יש איבר מינימלי יחיד). □

ההיפך אינו נכון. יש קבוצות סדורות ליניארית שאינן קבוצות סדורות היטב. כך למשל $(\mathbb{Z}, \leq)$ היא קבוצה סדורה ליניארית, אולם היא אינה סדורה היטב כי אין בה איבר מינימלי. הנה דוגמאות נוספות.

דוגמה 1.6.16: נתבונן בקבוצה $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$ של כל המספרים הממשיים בין 0 ל- 1 (לא כולל את 0 ו- 1), וביחס הסדר החלקי $\leq$ המוגדר על המספרים הממשיים. הזוג $(A, \leq)$ הוא קבוצה סדורה ליניארית, אולם אינו קבוצה סדורה היטב כי אין בקבוצה A איבר מינימלי. גם הקבוצה $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ של המספרים הרציונאליים החיוביים עם יחס הסדר $\leq$ אינה סדורה היטב - אין בה איבר מינימלי.

דוגמה 1.6.17: הקבוצה $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex})$ עם יחס הסדר המילוני היא קבוצה סדורה היטב. לעומת זאת $(\mathbb{N}^*, \leq_{lex})$ אינה סדורה היטב, כאשר כזכור $\mathbb{N}^*$ היא קבוצת כל הסדרות הבנויות מאיברי הקבוצה $\mathbb{N}$ (ראו דוגמה 1.6.5). למשל, אין איבר מינימלי בתת-קבוצה האינסופית $(1,2), (1,1,2), (1,1,1,2), \ldots$, מפני ש- $(1,2) \geq_{lex} (1,1,2) \geq_{lex} (1,1,1,2) \geq_{lex} \ldots$.

דוגמה 1.6.18: הקס"ח $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \le_{\text{Cart}})$ עם יחס הסדר הקרטזי אינה קבוצה סדורה היטב, כי אינה אפילו סדורה ליניארית, והרי הוכחנו שכל קבוצה סדורה היטב היא בהכרח סדורה ליניארית.

נגדיר כעת תנאי חשוב הנקרא תנאי המינימליות. תנאי זה יסייע לנו בפרק 3, בהגדרתו של העיקרון המורחב של האינדוקציה ובהוכחתו.

הגדרה 1.6.19: נאמר שקס"ח $(A, \le)$ מקיימת את **תנאי המינימליות** אם בכל תת-קבוצה לא ריקה $B\subseteq A$ יש לפחות איבר מינימלי אחד ב- B.

כל קבוצה סדורה היטב מקיימת כמובן את תנאי המינימליות, אולם יש קבוצות שמקיימות את תנאי המינימליות אך אינן סדורות היטב. כך למשל הקס"ח $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \le_{\text{Cart}})$ מקיימת את תנאי המינימליות אך אינה סדורה היטב.

שרשראות ואנטי-שרשראות

בכל קבוצה סדורה חלקית קיימים שני סוגים של תת-קבוצות מיוחדות. בכך עוסקת ההגדרה הבאה.

הגדרה 1.6.20: תהי $(A, \le)$ קס"ח ותהי $C \subseteq A$. נאמר ש- C **שרשרת** אם לכל $x,y\in C$ מתקיים $x \le y$ או $y \le x$. נאמר ש- C **אנטי-שרשרת** אם אין ב- C שני איברים $x \ne y$ המקיימים $x \le y$, כלומר אין ב- C זוג איברים הניתנים להשוואה ביחס הסדר $\le$.

נשים לב שאם $(A,\le)$ קבוצה סדורה ליניארית אז כל תת-קבוצה $C \subseteq A$ היא שרשרת, ובפרט A עצמה היא שרשרת. נעבור לכמה דוגמאות.

דוגמה 1.6.21: נביט שוב בקס"ח $(\mathbb{N}^+, |)$ שהוגדרה בדוגמה 1.6.4. אוסף כל המספרים $C\subseteq\mathbb{N}^+$ מהצורה 7^k כש- k מספר טבעי, דהיינו $C = \{1, 7, 49, 343,...\}$, מהווה שרשרת. אכן, יהיו $x,y\in C$, כלומר $x = 7^s$ ו- $y = 7^t$. נניח ש- $s \le t$, אז $x \mid y$. לעומת זאת, אוסף כל המספרים הראשוניים $P\subseteq\mathbb{N}^+$ הוא אנטי-שרשרת, מפני שאם $p,q\in P$ שני מספרים ראשוניים שונים, אז הם אינם מחלקים זה את זה (כזכור מספר ראשוני מתחלק רק ב- 1 ובעצמו ללא שארית).

הערה: אין זה מקרה שהמספרים הראשוניים מהווים אנטי-שרשרת בקס"ח $(\mathbb{N}^+\setminus\{1\}, |)$. בעצם, בכל קס"ח $(A, \le)$ אוסף האיברים המינימליים הוא אנטי-שרשרת (ראו תרגיל 10).

דוגמה 1.6.22: תהי A קבוצה בת n איברים ונביט בקס"ח $(P(A), \subseteq)$. יהי $0 \le k \le n$ מספר כלשהו ונתבונן בקבוצה $F\subseteq P(A)$ של כל התת-קבוצות של A שעוצמתן k. הקבוצה F היא אנטי-שרשרת, מכיוון שאם $B,C\subseteq A$ שתי קבוצות שונות בעלות עוצמה k, לא ייתכן ש- $B\subseteq C$ או ש- $C\subseteq B$. הסיבה היא כמובן שאם בין שתי קבוצות סופיות שוות עוצמה יש יחס הכלה, אז הן בהכרח זהות.

לשרשראות ואנטי שרשראות יש מעמד מיוחד בבעיות קומבינטוריות ואלגוריתמיות רבות. מעניין לכן, למצוא חלוקה של קס"ח סופית $(A, \le)$, לשרשראות ולאנטי שרשראות. כזכור אוסף קבוצות חלקיות $C_1,\dots,C_r \subseteq A$ הוא חלוקה של A אם $\bigcup_{i=1}^{r} C_i = A$, וכן כל הקבוצות באוסף זרות זו לזו. אולם נפתח בהגדרה הבאה.

הגדרה 1.6.23: תהי $(A, \le)$ קס"ח סופית. **האורך** של הקס"ח הוא העוצמה המירבית של שרשרת בקס"ח, והוא יסומן על ידי $\ell(A)$. **הרוחב** של קס"ח הוא העוצמה המירבית של אנטי-שרשרת בקס"ח והוא יסומן על ידי $w(A)$.

כעת נוכל לנסח שני משפטים מעניינים בהקשר זה.

משפט 1.6.24: תהי $(A, \le)$ קס"ח סופית. אז יש חלוקה של A ל- $\ell(A)$ אנטי-שרשראות, אך אין ל- A חלוקה למספר קטן מזה של אנטי-שרשראות.

משפט 1.6.25 (דילוורת' Dilworth): תהי $(A, \le)$ קס"ח סופית. אז יש חלוקה של A ל- $w(A)$ שרשראות, אך אין ל- A חלוקה למספר קטן מזה של שרשראות.

להלן נוכיח את חלקי המשפט האומרים "אין חלוקה למספר קטן מזה...". את ההוכחה של חלקו הראשון של משפט 1.6.24 נשלים בפרק 3 (משפט 3.1.13). ההוכחה המלאה של משפט דילוורת' היא מעבר להיקפו של ספר זה. על מנת להוכיח שהחסמים בשני המשפטים האחרונים אכן הדוקים, נוכיח את הטענה הקלה הבאה.

טענה 1.6.26: תהי C_1 שרשרת בקס"ח $(A, \le)$ ותהי C_2 אנטי-שרשרת בקס"ח. אז $|C_1 \cap C_2| \le 1$.
הוכחה: נניח בשלילה כי $|C_1 \cap C_2| \ge 2$. לכן יש שני איברים שונים $x,y \in C_1 \cap C_2$. מצד אחד חייב להיות יחס סדר בין x ל- y כי שניהם בשרשרת C_1. מאידך גיסא, הם בהכרח אינם ניתנים להשוואה שהרי שניהם איברים באנטי-שרשרת C_2. וזו כמובן סתירה. □

הוכחה חלקו השני של משפט 1.6.24: נוכיח עתה שאין חלוקה של הקס"ח $(A, \le)$ למספר קטן מ- $\ell(A)$ של אנטי-שרשראות. ואכן, תהי $X = (x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{\ell(A)})$ שרשרת מאורך $\ell(A)$ ב- A. נניח שהקבוצות $C_1,\dots,C_r \subseteq A$ הן חלוקה של A ל- r אנטי-שרשראות. לכן ודאי

$$X = \{x_1,\dots,x_{\ell(A)}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} C_i ,$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{r} |C_i \cap X| = |X| = \ell(A) .$$

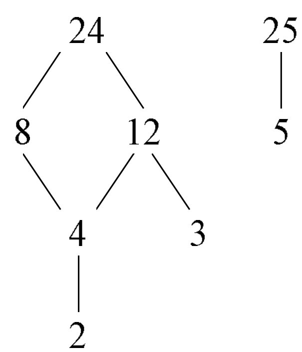
השוויון הראשון נובע מכך ש- $C_1,\dots,C_r$ חלוקה, ולכן כל איבר של X שייך לקבוצה אחת בלבד בחלוקה. מאידך גיסא, לפי טענה **1.6.26**, לכל i מתקיים $|C_i \cap X| \leq 1$. לכן, $\sum_{i=1}^{r} |C_i \cap X| \leq r$.
כלומר, הראינו ש- $r \geq \ell(A)$, ולכן החלוקה כוללת לפחות $\ell(A)$ אנטי-שרשראות כפי שטענו. □

הוכחת חלקו השני של משפט 1.6.25 נעשית בדיוק באותו אופן.

ייצוג קבוצה סדורה על ידי דיאגרמת הסה

ראינו כבר כיצד אפשר לתאר יחסים בעזרת גרפים מכוונים. לייצוג הגרפי החזותי יש יתרון רב בחקר קבוצות סדורות. במקרה זה מועיל להשתמש בגרף הנקרא **דיאגרמת הסה Hasse**. דיאגרמות הסה יסייעו לנו גם לראות בקלות מי הם האיברים המינימליים והמקסימליים של הקס"ח כדלקמן:
מכיוון שיחס סדר חלקי הוא טרנזיטיבי, קיום היחסים $x \leq y$ ו- $y \leq z$ גורר בהכרח את קיום היחס $x \leq z$. במקרה זה אין צורך לציין בתיאור הגרפי את היחס $x \leq z$ מפני שקיומו נובע ישירות מהטרנזיטיביות. לכן מקובל לתאר קס"ח על ידי דיאגרמות הסה שבהן היחס $a \leq b$ מצוין רק אם אין c שונה מהם ביניהם, כלומר לא קיים c המקיים $a \leq c \leq b$. במקרה זה נצייר בגרף את b **מעל** a עם צלע ביניהם, לציון העובדה ש- "b גדול מ- a" ביחס הסדר. כמו-כן לא נציין בדיאגרמה גם את הלולאות הנובעות מתכונת הרפלקסיביות של יחס הסדר.

דוגמה 1.6.27: תהי $A = \{2, 3, 4, 5, 8, 12, 24, 25\}$ ונתבונן ביחס | המוגדר על ידי $m \mid n$ אם m מחלק את n ללא שארית. במקרה זה אפשר לראות בתרשים **1.6.1** את דיאגרמת הסה המתאימה.

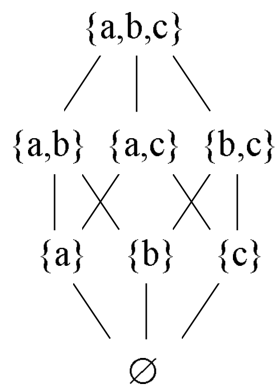


תרשים 1.6.1: דיאגרמת הסה המתאימה ליחס "מחלק את".

לדיאגרמת הסה יש כאמור יתרונות בתיאור קבוצות סדורות חלקית. כך למשל, אפשר לראות מהדיאגרמה בתרשים **1.6.1** שהאיברים המקסימליים הם 25 ו- 24 כי הם מופיעים בשורה העליונה של הדיאגרמה. האיברים המינימליים הם $2, 3, 5$ כי אין כל איבר מתחתם. האיברים 25 ו- 3 אינם ניתנים להשוואה ביחס כי אין מסלול ביניהם. גם 8 ו- 12 אינם ניתנים להשוואה, כי

אין ביניהם מסלול יורד של צלעות. לעומת זאת הצלע בין 12 הנמצא למעלה בדיאגרמה לבין 3 הנמצא מתחתיו מציינת את העובדה ש- $3 \mid 12$. אין בדיאגרמה צלע בין 24 ל- 3 אף כי $3 \mid 24$ מפני שאת היחס $3 \mid 24$ אנו מסיקים כאמור מתוך היחסים $3 \mid 12$ ו- $12 \mid 24$ בצירוף עם תכונת הטרנזיטיביות. ובמילים אחרות, העובדה שיש מסלול יורד של צלעות מ- 24 ל- 3 מראה לנו ש- $3 \mid 24$. כמו-כן כל מסלול יורד של צלעות בדיאגרמה מתאים לשרשרת. כך למשל $\{2,4,12,24\}$ היא שרשרת בקס"ח.

דוגמה 1.6.28: תהי $A = \{a, b, c\}$ ונתבונן ביחס ההכלה $\subseteq$ המוגדר בין תת-קבוצות של A. הדיאגרמה המתקבלת משורטטת בתרשים 1.6.2.



תרשים 1.6.2: דיאגרמת הסה המתאימה ליחס ההכלה.

במקרה זה כפי שניתן לראות בבירור הקבוצה $\{a,b,c\}$ היא האיבר המקסימלי היחיד ואילו $\varnothing$ היא האיבר המינימלי היחיד. כמו-כן אפשר לראות בבירור את האיברים הניתנים להשוואה ואת אלה שלא. כך למשל, אפשר לראות ש- $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ היא אנטי-שרשרת, ואילו $\{a,b,c\}$, $\{a,c\}$, $\varnothing$ היא שרשרת (זהו מקרה פרטי של דוגמה 1.6.22).

ראינו שנוח לתאר קבוצה סדורה חלקית $(A, \leq)$ בעזרת דיאגרמת הסה. כיצד נבנה בצורה שיטתית דיאגרמה כזאת בהינתן קס"ח $(A, \leq)$? בשורה העליונה של הדיאגרמה נרשום את האיברים המקסימליים של הקס"ח. נתבונן כעת על הקס"ח ללא האיברים האלה, נמצא שוב את האיברים המקסימליים ונרשום אותם בשורה מתחת, וכך הלאה. לאחר מכן נחבר בקו כל שני איברים משורות סמוכות אם הם ניתנים להשוואה ביחס. האיברים המופיעים בשורה העליונה הם כאמור האיברים המקסימליים. איברים שמתחתם אין איברים נוספים הם איברים מינימליים. וכאמור, $a \leq b$ ביחס הנתון אם ורק אם b ממוקם מעל a בדיאגרמה וקיים מסלול יורד של צלעות שמחבר בין b ל- a.

תרגילים

1. נתבונן ביחס הסדר | המוגדר על ידי $m \mid n$ אם m מחלק את n ללא שארית, כאשר n,m מספרים טבעיים חיוביים.
   א. הוכיחו כי | הוא יחס סדר חלקי על המספרים הטבעיים החיוביים.
   ב. תהי $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$. מצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים של הקס"ח $(A, \mid)$. מהו האורך של הקס"ח ומהו הרוחב?
   ג. ציירו דיאגרמת הסה של הקס"ח $(A, \mid)$.

2. הוכיחו שבקס"ח סופית יש תמיד איבר מינימלי ואיבר מקסימלי.

3. נאמר שקס"ח $(A, \leq)$ מקיימת את תנאי השרשרת היורדת אם אין בה שרשרת אינסופית של איברים הקטנים זה מזה, כלומר אין בה שרשרת אינסופית יורדת מהצורה $\ldots \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1$. הוכיחו שתנאי השרשרת היורדת שקול לתנאי המינימליות.

4. כיצד תיראה דיאגרמת הסה של הקבוצה הסדורה חלקית $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{Cart})$?

5. כיצד תיראה דיאגרמת הסה של הקבוצה הסדורה חלקית $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{lex})$?

6. האם יחס הרישא מקיים את תנאי המינימליות?

7. יהיו R,S שני יחסי שקילות על הקבוצה X. נאמר ש- $R > S$ אם לכל $x,y\in X$ המקיימים $(x,y)\in R$ מתקיים $(x,y)\in S$. הוכיחו שהיחס $>$ הוא יחס סדר חלקי.

8. נביט בקס"ח הכוללת את המספרים מ- 1 עד 24 עם היחס "מחלק את". מהו האורך של הקס"ח ומהו הרוחב? חלקו את הקס"ח לשרשראות ולאנטי-שרשראות כפי שמובטח במשפטים 1.6.24 ו- 1.6.25.

9. תהיינה $A = (A_1,\ldots,A_s)$ ו- $B = (B_1,\ldots,B_t)$ חלוקות של הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$. דהיינו $\bigcup_{i=1}^{s} A_i = \{1,2,\ldots,n\}$ והקבוצות A_i זרות זו לזו, וכך גם לגבי $B_1,\ldots,B_t$. נאמר שהחלוקה B **מעדנת** את החלוקה A אם לכל $1 \leq i \leq t$ קיים $1 \leq j \leq s$ כך ש- $B_i \subseteq A_j$. נסמן זאת על ידי $A \succ B$.
   א. הוכיחו ש- $\succ$ הוא יחס סדר חלקי על קבוצת כל החלוקות של $\{1,2,\ldots,n\}$.
   ב. הוכיחו שביחס הסדר החלקי הזה יש איבר מינימלי יחיד ואיבר מקסימלי יחיד. מהם?
   ג. מהו האורך של הקס"ח?
   ד. מצאו חלוקה של הקס"ח ל- n אנטי-שרשראות.
   ה. שרטטו את דיאגרמת הסה של הקס"ח כאשר $n = 3$.

10. הוכיחו שבכל קס"ח $(A, \leq)$ אוסף כל האיברים המינימליים הוא אנטי-שרשרת.

הערות היסטוריות

רנה דקרט René Descartes (נולד בצרפת ב- 1596, מת בשוודיה ב- 1650) רנה דקרט תרם תרומות יסודיות לפיזיקה, למתמטיקה ולפילוסופיה. בפיזיקה הוא פעל בחקר האופטיקה והניח את היסודות למחקר שיטתי של המטאורולוגיה. עבודתו החשובה ביותר במתמטיקה היא בתחום הגיאומטריה האנליטית. עבודתו אפשרה לנצל את התפתחות האלגברה לחקר בעיות בגיאומטריה. על שמו נקרא מושג המכפלה הקרטזית של קבוצות (ראו סעיף 1.2). ביסודות הפילוסופיה הוא תרם תרומה חשובה לביסוס אנליטי של הפילוסופיה.
סופו של דקרט היה טרגי: בגלל מצב בריאותו הלקוי הותר לו עוד בילדותו, בהיותו תלמיד בבית ספר לישון, מדי בוקר עד השעה 11. ב- 1649 בהיותו כבר מדען מהולל, הזמינה אותו קריסטינה מלכת שוודיה לשטוקהולם על מנת ללמד אותה מתמטיקה. למרבה הצער, המלכה עמדה על כך שיום העבודה שלו יתחיל עם שחר ומפגשיהם בארמון נקבעו לשעה 5 בבוקר. ההשכמות המוקדמות והקור השוודי החישו את קצו של דקרט והוא מת שם.

ג'ון ון John Venn (אנגליה 1834-1923) עסק בתחומי הלוגיקה וההסתברות, אולם הוא ידוע בעיקר בשל דיאגרמות ון לתיאור קבוצות והפעולות ביניהן.

אוגוסטוס דה-מורגן Augustus De Morgan (נולד בהודו ב- 1806, מת באנגליה ב- 1871) נולד בהודו שם שירת אביו כקצין. דה-מורגן הגדיר את המושג אינדוקציה מתמטית והגדיר במדויק את שיטת ההוכחה הזו, שאף כי הייתה בשימוש כבר קודם לא נוסחה עד אז באופן פורמלי. הוא הגדיר את חוקי דה-מורגן בלוגיקה ובתורת הקבוצות, ועבודותיו יצרו קשרים מעניינים בין האלגברה ללוגיקה.

גאורג פרדיננד לודוויג פיליפ קנטור Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (נולד ברוסיה ב- 1845, מת בגרמניה ב- 1918) נחשב למייסדה של תורת הקבוצות. הוא החל את הקריירה המתמטית שלו בחקר האנליזה המתמטית. במהלך חקירותיו הוא הגיע לשאלות יסודיות בתורת הקבוצות. הוא הגדיר את המושגים היסודיים בתורת הקבוצות ובין היתר את המושג של שקילות בין קבוצות על ידי התאמה חח"ע ועל (ראו סעיף 1.5). מכאן הייתה הדרך קצרה להבנה שיש יותר מאינסוף אחד. כך למשל, לקבוצת המספרים הרציונאליים יש עוצמה שווה לזו של הטבעיים, אך עוצמה זו קטנה ממש מזו של המספרים הממשיים. כאשר הוכיח קנטור שלקטע $(0,1)$ של כל המספרים הממשיים בין 0 ל- 1 יש עוצמה שווה למרחב ה- n-ממדי, הוא כתב: "אני רואה זאת, אך אינני מאמין".
חייו של קנטור לא היו קלים. אף כי הוא זכה להערכה ולכבוד בחייו, הוא גם נתקל בלא מעט התנגדות למחקריו החדשניים. מלבד קשיים אלה הוא סבל כנראה מדיכאון קליני ובילה לא מעט משנותיו האחרונות בסנטוריום. מלבד זה סבל קנטור גם מניסיונותיו הכושלים לפתור את השערת הרצף (ראו סעיף 1.5), בעיה שבאה על פתרונה רק מאה שנים מאוחר יותר. בערוב ימיו נאלץ קנטור להתמודד עם הפרדוקסים הנובעים מתורת הקבוצות הנאיבית שלו. הדיון בפרדוקסים אלה הוביל להתפתחויות חשובות ביסודות המתמטיקה בדורות שאחריו. על אף הפרדוקסים שהתגלו בתורת הקבוצות הנאיבית של קנטור, אמר עליו דויד הילברט: "איש לא יגרש אותנו מגן העדן שיצר קנטור".

ברטרנד ארתור ויליאם ראסל Bertrand Arthur William Russell (ווילס 1872-1970) אחד הלוגיקנים החשובים במאה ה- 20. ראסל השפיע השפעה ניכרת על פיתוח הלוגיקה הפורמלית המודרנית. מאמציו העיקריים במתמטיקה התמצו בכתיבת ספר מונומנטלי Principia Mathematica שבו ניסה (יחד עם וויטהד Whitehead) לנסח יסודות אקסיומתיים לכל המתמטיקה. מאמצים אלה הוכו מכה ניצחת על ידי משפט אי-השלמות של קורט גדל (ראו פרק 2, הערות היסטוריות). ב- 1901 הוא גילה את הפרדוקס הנקרא על שמו (ראו סעיף 1.1), שנובע מתורת הקבוצות הנאיבית של קנטור. בנוסף למתמטיקה עסק ראסל גם בפילוסופיה וכתב ספרים רבים בתחום זה, וביניהם כאלה המיועדים גם לקהל הרחב שזכו לתהודה רבה. מלבד הפעילות המדעית שלו, היה ראסל מעורה גם בפעילות פוליטית וציבורית, בעיקר בכיוונים פציפיסטיים. על פעילותו זו זכה בתהילה רבה, אך גם שילם עליה מחיר די כבד. הוא פוטר מעבודתו בקולג' טריניטי בעקבות הרשעתו בשל פעילות נגד מלחמת העולם הראשונה. מאוחר יותר הוא הורשע שנית ואף נשלח לכלא לחצי שנה. בשנות ה- 50 וה- 60 הוא בלט בפעילותו האנטי-מלחמתית ובעיקר הפגין נגד פיתוח נשק גרעיני. על מאמציו אלה זכה ראסל בפרס נובל לשלום ב- 1950.