

# אלגוריתמים ותוכניות

מבוא לשפות תכנות, חישוביות וסיבוכיות

מאת

אמיר בן-עמרם

המכללה האקדמית של תל-אביב – יפו

## תוכן העניינים

7	הקדמה
13	תוכן מפורט
	חלק ראשון
17	פרק 1 : מבוא
23	פרק 2 : שפות תכנות כמודלים לחישוב
29	פרק 3 : חישוב בעצים והשפה WHILE
47	פרק 4 : מטה-תכנות ויחסים בין שפות שונות
73	פרק 5 : תכנות לא מבני : השפה GOTO
83	פרק 6 : תכנות פונקציונלי : השפה F
103	פרק 7 : שפות מלאות סבירות ותכונותיהן
	חלק שני
119	פרק 8 : חישוביות של פונקציות
135	פרק 9 : בעיות הכרעה ומחלקותיהן
145	פרק 10 : פעולות על קבוצות ותכונות סגירות
153	פרק 11 : רדוקציות התאמה
171	פרק 12 : בעיות הכרעה מפורסמות
179	פרק 13 : מנייה אפקטיבית והכרעה חלקית
	חלק שלישי
185	פרק 14 : מודלים לסיבוכיות זמן
199	פרק 15 : הקדמה לניתוח סיבוכיות של בעיות
209	פרק 16 : מחלקות סיבוכיות
221	פרק 17 : חישוב אי-דטרמיניסטי והמחלקה NP
231	פרק 18 : בעיות קשות ל-NP והמחלקה NPC
243	פרק 19 : עוד על NP ו-NPC
253	פרק 20 : מכונות מופשטות וכוחן החישובי
279	ביבליוגרפיה
275	מילון מונחים
277	מפתח

## הקדמה

ספר זה הוא מבוא לאותם ענפים של מדעי המחשב המספקים הבנה של היכולות והמגבלות של תוכניות מחשב, או אלגוריתמים (הקשר בין מושגים אלה הוא אבן הפינה לספר). הספר מיועד בעיקר לליווי קורס אשר נלמד, החל משנת תשנ"ז, במסגרת תואר ראשון במדעי המחשב במכללה האקדמית של תל אביב - יפו.

שלושת הנושאים שבהם עוסק הספר: תורת שפות התכנות, תורת החישוביות ותורת הסיבוכיות, נכללים בדרך כלל בכל תוכנית לימודים במדעי המחשב. עם זאת, לעיתים קרובות מוצגים נושאים אלה בנפרד. שני האחרונים, חישוביות וסיבוכיות, ידועים בדרך כלל כחומר לימוד קשה ו"מרוחק", והקורס המכיל נושאים אלה, ידוע לפעמים בשם "הקורס התאורטי". אני מאמין שחלק מן הקושי והריחוק נובע מהגישה המסורתית שלפיה מוצגים נושאים אלה על בסיס מודלים חישוביים מופשטים – בעיקר מכונת טיורינג.

ההשקפה בספר זה היא ששלושת הנושאים צריכים להיות מוצגים ביחד, ולא רק זה בצד זה, אלא זה על גבי זה: שפות תכנות מוצגות בספר זה כמודל הפרמלי שעליו נבנית תורת החישוביות והסיבוכיות. גישה זו מקרבת את הנושאים האחרונים לפרקטיקה של מקצוע התוכנה, ומערה דם חדש לתיאוריה ישנה, בעיקר בתורת החישוביות. הסיבת להתקרבות לפרקטיקה ברורה: טענות הנלמדות בקורסים התיאורטיים, למשל אי הכרעות של בעיית העצירה (במכונת טיורינג), ניתנות להשלכה לעולם התוכנה; אולם בספר זה הטענות עוסקות בתוכנה ממש (אנו מוכיחים שתוכניות אינן מסוגלות להכריע את שאלת העצירה של תוכניות). רעיונות בסיסיים בחישוביות, כגון מכונה אוניברסלית וסימולציה בין מודלים חישוביים מתחלפים כאן ברעיון המפרש (interpreter) והמהדר (compiler) – רעיונות אלה נפוצים יותר מהמקבילים התיאורטיים שלהם עקב חשיבותם בעבודת התכנות המעשית. ההחלפה של סימולציה בין מודלים חישוביים שונים בקומפילציה בין שפות תרמה לשיפור התיאוריה (השיפור נובע מהאבחנה שקומפילציה מבוצעת ע"י תוכנה, ולכן למושג הקומפילציה תוכן נוסף על המושג הקלאסי של סימולציה). טענה מסוג: שפת תכנות בעלת מבנה א' שקולה בכוחה החישובי לשפה בעלת מבנה ב', הינה מעניינת יותר, מנקודת ראות של מקצוע התכנות, מטענה על שקילות של מכונות מופשטות. קוראים המכירים את הספרות הקיימת בנושאי חישוביות וסיבוכיות ימצאו בספר דוגמאות נוספות לגלגול כזה של מושגים.

גישתנו נתמכת גם על ידי טיעון "אבולוציוני": שפות תכנות הן כלים להבעה של אלגוריתמים בצורה קונקרטית ומדויקת. האבולוציה של שפות התכנות נבעה בין השאר מהרצון לעשות מלאכה זו בצורה מוצלחת יותר. לכן, אם ברצוננו לחקור אלגוריתמים,

אין דבר טבעי יותר מלנצל את הידע על כלים טובים לייצוג של אלגוריתמים, כלומר את הידע על שפות תכנות.

### האידיומטיקה של הספר (כלומר, השפות המוזרות המופיעות בו)

המודל הפורמלי שבו נייצג אלגוריתמים לצורך חקירה והוכחות הוא שפת תכנות; נשאלת השאלה באיזו שפה נשתמש. מהדרישה לקפדנות בהוכחות ובבניות נובע שזו צריכה להיות שפה, שאפשר לתארה בדייקנות מלאה במאמץ לא רב; במונחים של העוסקים בשפות תכנות, זו צריכה להיות שפה "קטנה". מהמגוון העצום של תכנות ואמצעים שיש בשפות תכנות, אנו צריכים לבחור באלה שיפשטו ככל האפשר את יישום הרעיונות שאנו מעוניינים להציגם. התוצאה של שיקולים אלו הוא שימוש בשפה או בשפות תכנות שאינן "מעשיות". הדבר נראה כהרחקה של התיאוריה הנלמדת מהמעשה, ובכל זאת זוהי הרחקה קטנה בהרבה מזו שיוצר השימוש במודלים כגון מכונת טיורינג. המאמץ הנדרש לצורך לימוד השפות הקטנות שמוגדרות בספר אינו עולה על זה שנדרש לצורך מיומנות בעבודה עם מכונות טיורינג, למשל, ומביא לרווחים דידקטיים בהיותו משולב בלימוד של עקרונות שפות תכנות. לשמחתי, לא היה עליי להמציא שפות חדשות ממש, שכן ספר זה אינו הניסיון הראשון מסוגו. שפות התכנות המוגדרות בספר זה מבוססות על ספרו של ניל ג'ונס (Neil Jones), שיוזכר שוב בהמשך. אפשר לקוות ששפות אלה יתקבלו ככלי תיאורטי נפוץ ואולי יתפסו, אצל הנוקטים בגישה זו לחישוביות ולסיבוכיות, מקום דומה לזה שמודלים קלאסיים יותר תופסים בקורסים המסורתיים.

מחיר נוסף של השימוש במודל חישובי חדש יכול להיות הזנחה של מודלים ישנים יותר. ממילא, הספרות הקיימת במדעי המחשב מציעה אוסף כה נרחב של מודלים חישוביים שלרוב לא נרצה להציג את כולם. בספר זה המודל המוכר היחיד בו המוצג בהרחבה הוא מודל ה-RAM (random access machine). אין זה מקרה: מודל זה קרוב ביותר למודל תכנותי של מחשבים מעשיים. לדעתי, חשיבותו העיקרית היא כמודל לסיבוכיות, ולכן הוא מופיע רק בחלק השלישי של הספר (שיקול נוסף היה לא להעמיס על החלק הראשון, אך אין מניעה לשנות את סדר הלימוד). מפאת החשיבות שאני מייחס לדיון במודל זה, הוא מפורט יותר ממה שנמצא בדרך כלל בספרי מבוא לסיבוכיות.

מודלים קלאסיים אחרים, כגון מכונת המונים (counter machine) ומכונת טיורינג, אינם משתלבים כלל ברצף החומר, אך לפחות למי שמתכוון להוסיף ולהעמיק בתיאוריה של מדעי המחשב יש צורך להכירם. פרק 20 נועד להשלים פער זה.

### עומד על כתפי ענקים...

המקור החשוב ביותר לרעיונות שבספר זה הוא ספרו של ניל ג'ונס

Computability and Complexity from a Programming Perspective (MIT Press, 1997).

הספר מכיל גם חומר רב שאיננו נמצא כאן, כך שאפשר לפנות אליו להרחבה. מאידך כולל הספר שלפניכם מספר חידושים:

- יש הרחבה ניכרת בהסברים ובדוגמאות, באותם נושאים שבהם בחרתי להתמקד. לפעמים החלפתי הגדרות והוכחות שמופיעות אצל ג'ונס בגרסאות חדשות שמתאימות

יותר לגישה הדידקטית בה בחרתי. לדוגמה, גיונס דן במחלקות סיבוכיות בצורה מופשטת וכללית מאוד, החובקות מחלקות של סיבוכיות זמן וסיבוכיות מקום, והדבר משפיע מאוד על הניסוחים וההוכחות בפרקים אלו. בספר זה, יוצגו רק המחלקות העיקריות של סיבוכיות זמן, ולכן גם ניסוחים והוכחות יכולים להיות קונקרטיים יותר.

- הספר דן במספר נושאים שמוזנחים אצל גיונס, כגון המחלקה EXP בסיבוכיות, המחלקות coRE ו-REUCoRE בחישוביות, ועוד.
- מובאים עדכונים תיאורטיים, שעלו כתוצאה מניסיון בעבודה ובמחקר בגישה התכנותית: אציין במיוחד את הטיפול במושג שפת התכנות המלאה-סבירה (פרק 7 ואילך).

## עזרי הוראה

שפות התכנות המוצגות בספר שואלות מושגים עיקריים משפות פונקציונליות, כגון LISP, Scheme ו-ML. לתלמידים המכירים שפות כאלה, לא יהיה כל קושי ללמוד שפה כזו במהירות ולהבין את תכונותיה, גם אם זה נעשה "על הנייר" בלבד. עם זאת, ככלי עזר, בעיקר למי שלא ראה שפות דומות, ניתן לתרגל שימוש בשפה בעזרת התוכניות הנמצאות בכתובת:

<http://www2.mta.ac.il/~amirben/while/>

התוכניות כתובות ב-Common LISP, כך שסביבת LISP דרושה לצורך הפעלתם, אבל לא נחוץ ידע בתכנות LISP כדי להשתמש בהן.

## שלמי תודה

תוכנו של ספר זה עוצב במידה רבה על ידי ההתפתחות של הקורס שלימדתי במכללה האקדמית של תל-אביב יפו, ועל כן לא היה בא לעולם לולא ניתנה לי האפשרות לפתח את הקורס באופן חדשני. על כך מגיעה תודה למיכאל טרסי, ראש מגמת מדעי המחשב במכללה בשנותיה הראשונות. שותפי לפיתוח הקורס היה אופיר רחמן ותרומתו ניכרת לכל אורך הספר. גם שוני דר, טל הסנר ועודד שוורץ עיינו בכתב היד ותרמו הצעות ותיקונים.

## הערות טיפוגרפיות

סימן הריבוע □, בקצה השמאלי של השורה, משמש לציון סופן של הוכחות. תרגילים קשים במיוחד מסומנים בקו מצד ימין (כמו שורה זו).

## תוכן מפורט

17	פרק 1 : מבוא
21	הערות ומראי מקומות
	חלק ראשון
23	פרק 2 : שפות תכנות כמודלים לחישוב
23	פונקציות חלקיות ותוכניות
25	הגבלת טיפוס הנתונים
26	בחירת שפת התכנות
26	כיצד מגדירים שפת תכנות
27	אמצעים להגדרת תחביר וסמנטיקה
28	הערות ומראי מקומות
29	פרק 3 : חישוב בעצים והשפה WHILE
29	עצים כטיפוס נתונים
29	רשימות
30	ייצוג מידע ע"י עצים
31	שקילות טיפוס הנתונים
32	שפת WHILE : תחביר ומשמעות
34	תוכנית שלמה
35	הרצה יבשה
36	עץ התחביר המופשט
36	ממתיקים תחביריים
38	דוגמאות נוספות : פעולות על מספרים
39	התאמת תבניות
40	פקודת case
41	זמן ריצה
42	תוכניות נוספות
43	סמנטיקה פורמלית

45	הערות ומראי מקומות
46	תרגילים
47	פרק 4 : מטה-תכנות ויחסים בין שפות שונות
47	מטה-תכנות (metaprogramming)
48	תוכניות כנתונים : תחביר קונקרטי
50	דוגמאות פשוטות למטה-תכנות בשפת WHILE
53	טיפול רקורסיבי בתוכניות
54	קומפילציה
56	המפרש (Interpreter)
57	יחסי כוחות בין שפות תכנות
59	קומפילציה : דוגמאות פשוטות
66	המצמצם
68	הטלות פוטמורה
70	הערות ומראי מקומות
71	תרגילים
73	פרק 5 : תכנות לא מבני : השפה GOTO
73	הגדרת השפה
75	קומפילציה של WHILE ל-GOTO
76	קומפילציה מ-GOTO ל-WHILE
77	מפרש לשפת GOTO
79	סמנטיקה פורמלית ל-GOTO
81	הערות ומראי מקומות
81	תרגילים
83	פרק 6 : תכנות פונקציונלי : השפה F
83	הגדרת השפה
85	"הרצה יבשה" - פיתוח ביטוי
86	סיבוכיות זמן
87	תוכניות נוספות
88	ממתיקים תחביריים
89	קומפילציה של F ל-GOTO
91	אינטרפרטציה של WHILE ב-F
94	השפה $F^{prm}$

95	.....	השפה F+
96	.....	אינטרפרטציה של F <sup>1pm</sup> -ב-WHILE
98	.....	הערות ומראי מקומות
99	.....	תרגילים
103	.....	פרק 7 : שפות מלאות סבירות ותכונותיהן
103	.....	התזה של צ'רץ' וטיורינג לגרסותיה
105	.....	תכונות של שפות מלאות סבירות
107	.....	שקילויות המצריכות קידוד נתונים
116	.....	הערות ומראי מקומות
116	.....	תרגילים
		חלק שני
119	.....	פרק 8 : חישוביות של פונקציות
119	.....	מושגי יסוד
120	.....	הפונקציה האוניברסלית
121	.....	בנייה מפורשת של פונקציה לא חשיבה
124	.....	האם הפונקציה חשיבה? .....
125	.....	חישוב פונקציות חלקיות
126	.....	דוגמאות נוספות
128	.....	חישוביות בשפות לא מלאות
132	.....	הערות ומראי מקומות
134	.....	תרגילים
135	.....	פרק 9 : בעיות הכרעה ומחלקותיהן
135	.....	מושגים והגדרות
137	.....	מחלקות של בעיות הכרעה
139	.....	בעיית העצירה בשפות שונות
140	.....	הכרעה חלקית
143	.....	דוגמא לבעיה שאינה כריעה חלקית
143	.....	תרגילים



145.....	פרק 10 : פעולות על קבוצות ותכונות סגירות
150.....	המחלקה coRE
151.....	תרגילים
153.....	פרק 11 : רדוקציות התאמה
155.....	רדוקציה ככלי להשוואת בעיות
159.....	משפט רייס
162.....	דוגמאות נוספות
165.....	על דירוג בעיות ההכרעה על-ידי רדוקציות
168.....	מחוץ ל-RE
168.....	הערות ומראי מקומות
168.....	תרגילים
171.....	פרק 12 : בעיות הכרעה מפורסמות
171.....	הבעיה העשירית של הילברט
173.....	בעיית ההכרעה הלוגית
174.....	אריתמטיקה של פרסבורגר
175.....	דחיסת מידע וסיבוכיות קולמוגורוב
177.....	בעיית קולץ
178.....	הערות ומראי מקומות
179.....	פרק 13 : מנייה אפקטיבית והכרעה חלקית
179.....	מנייה אפקטיבית של קבוצה
181.....	קבוצות שיש עבורן עדויות לשייכות
182.....	אפיונים של קבוצות כריעות חלקית
184.....	תרגילים
	חלק שלישי
185.....	פרק 14 : מודלים לסיבוכיות זמן
186.....	מחלקות סיבוכיות
187.....	מספר הגדרות חשובות
188.....	ניתוח זמן ריצה של אלגוריתמים
190.....	מודל ה-RAM
193.....	תרגום שפות דמויות WHILE ל-RAM
195.....	תרגום מ-RAM ל-WHILE

196.....	מודלים סבירים לזמן ריצה.....
198.....	תרגילים .....
199.....	פרק 15 : הקדמה לניתוח סיבוכיות של בעיות.....
199.....	השפעת ייצוג הקלט : בעיות בגרפים .....
201.....	השפעת ייצוג הקלט : בעיות במספרים .....
205.....	סיכום.....
206.....	פונקציות ישימות בזמן .....
207.....	תרגילים .....
209.....	פרק 16 : מחלקות סיבוכיות .....
209.....	המחלקות P ו-EXP .....
210.....	היררכיית המחלקות.....
212.....	רדוקציות פולינומיאליות .....
214.....	דוגמא להוכחת חסם תחתון .....
215.....	סוגים שונים של בעיות חישוב .....
218.....	חיפוש ממצה .....
218.....	Backtracking.....
219.....	קשר כללי בין חישוב פונקציה והכרעת קבוצה.....
220.....	תרגילים .....
221.....	פרק 17 : חישוב אי-דטרמיניסטי והמחלקה NP.....
225.....	כמה בעיות חשובות ב-NP .....
228.....	מתקפות חדשות על בעיות NP.....
229.....	הערות ומראי מקומות .....
230.....	תרגילים .....
231.....	פרק 18 : בעיות קשות ל-NP והמחלקה NPC .....
232.....	הוכחת שייכות של בעיות ל-NPC.....
236.....	מעגל המילטון ובעיות דומות .....
239.....	ערכן המעשי של בעיות קשות.....
240.....	הערות ומראי מקומות .....
241.....	תרגילים .....

243.....	פרק 19 : עוד על NP ו-NPC.....
243.....	שרטוט הגבולות בין P ל-NPC.....
244.....	האם NP סגורה למשלים? .....
246.....	אי-דטרמיניזם כהסתעפות או התפצלות.....
247.....	הוכחת משפט קוק.....
250.....	הערות ומראי מקומות.....
250.....	תרגילים.....
253.....	פרק 20 : מכונות מופשטות וכוחן החישובי.....
253.....	מודל העל של מכונה מופשטת.....
255.....	דוגמא פשוטה : אוטומט סופי.....
255.....	מכונת המונים.....
258.....	מכונת המחסניות.....
260.....	מכונת הסרטים – הלא היא מכונת טיורינג.....
265.....	ייצוג טקסטואלי של מכונה.....
265.....	מדדי סיבוכיות במכונת טיורינג.....
266.....	הנימוקים לעקרון הסופיות, וחריגות ממנו.....
267.....	לסיום – כמה הערות על מינוח.....
268.....	הערות ומראי מקומות.....
268.....	תרגילים.....
	<b>נספחים</b>
271.....	ביבליוגרפיה.....
275.....	מילון מונחים.....
277.....	מפתח.....